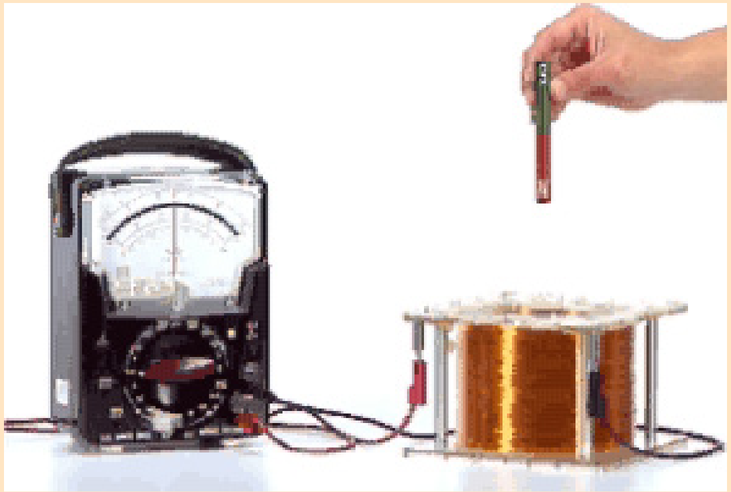
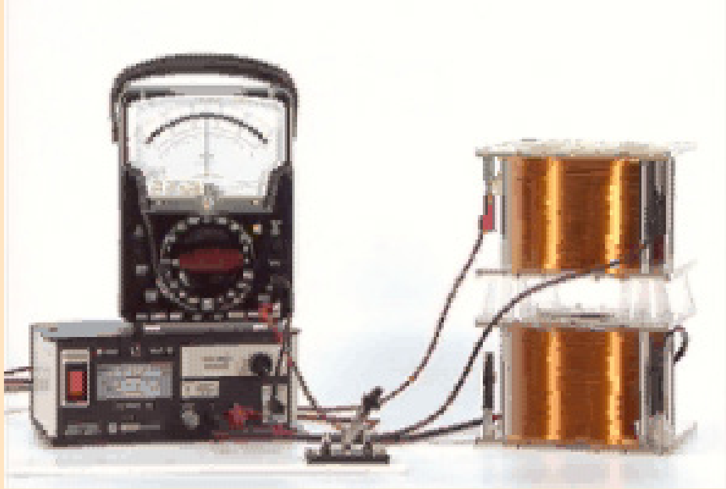
Indukcja elektromagnetyczna





Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

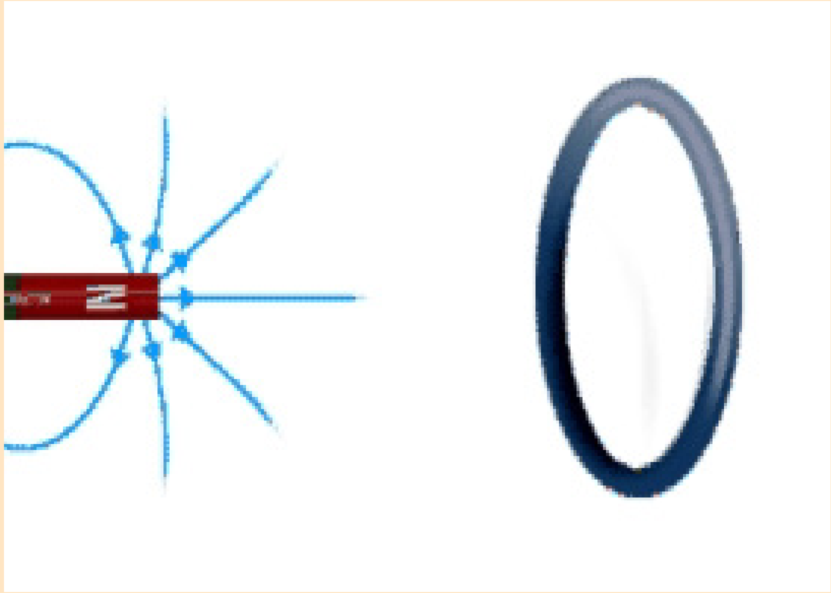
$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Dla N zwojów

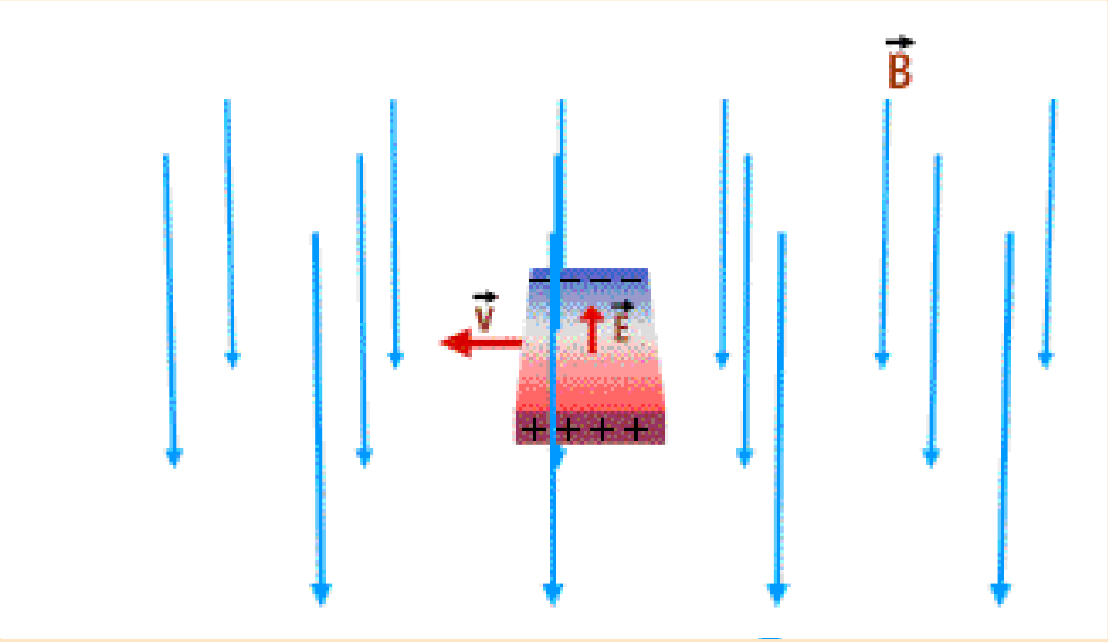
Reguła Lenza

Reguła Lenza

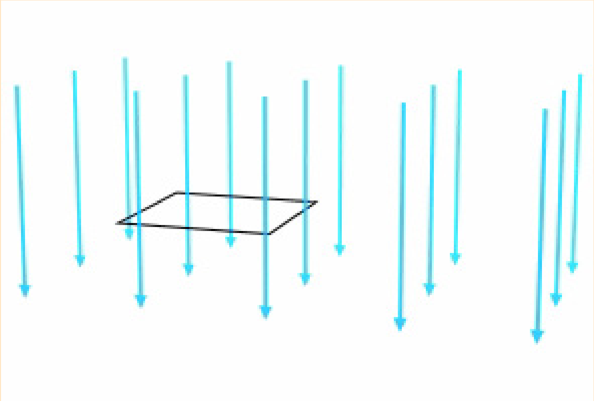
Prąd indukowany ma taki kierunek, że wywołane przez niego pole magnetyczne przeciwstawia się zmianie, która go wywołała.

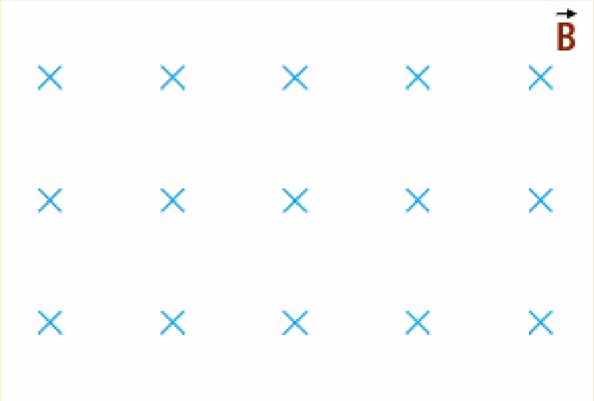


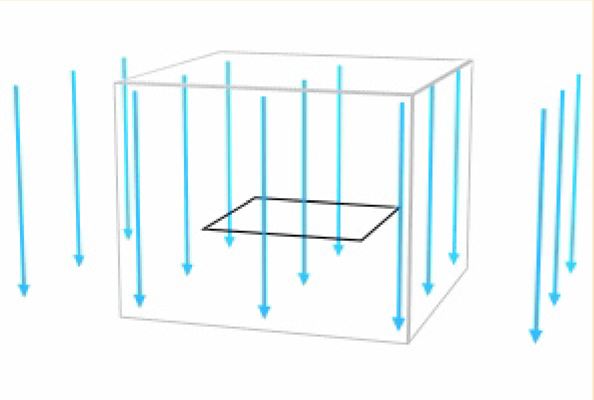
Indukcja elektromagnetyczna



Ramka z prądem







Zmianę strumienia można wywołać przez:

Zmianę powierzchni

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = $$

$$= \frac{d(Blx)}{dt} = Blv$$

Obrót

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = $$

$$= -\frac{d(B \cdot A \cdot \cos\omega t)}{dt} = $$

$$= BA\omega\sin\omega t$$

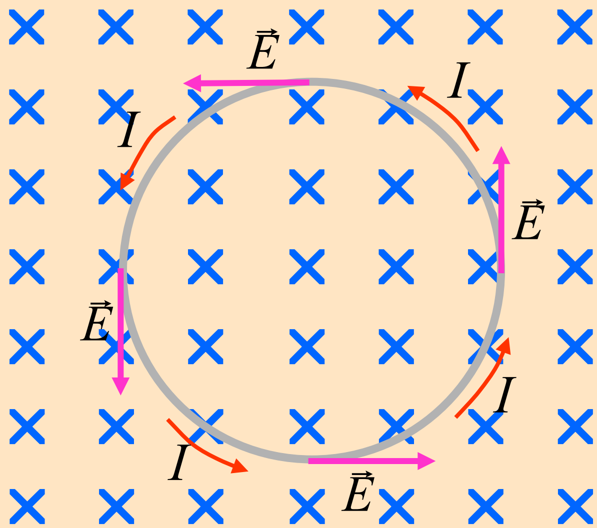
Zmianę pola magnetycznego

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = $$

$$= -\frac{d(B \cdot A)}{dt} = $$

$$= -A\frac{dB}{dt}$$

Zmienne pole magnetyczne



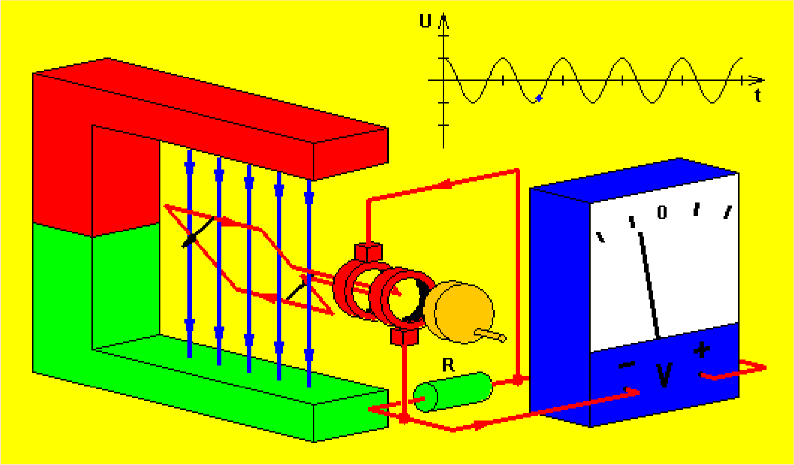
$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{B}}{\mathrm{dt}}$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{B}}{\mathrm{dt}}$$

Zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne

Przykłady
zastosowania zjawiska indukcji elektromagnetycznej

Generowanie prądu

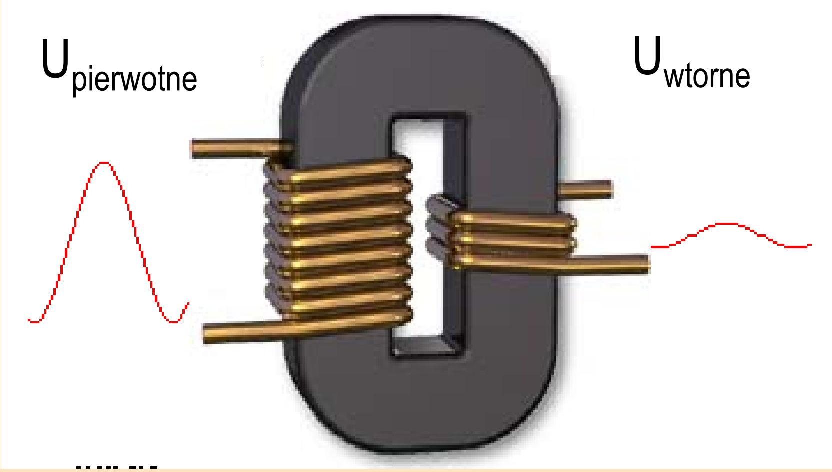


$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} =$$

$$= -\frac{d(B \cdot A \cdot \cos\omega t)}{dt} =$$

$$= BA\sin\omega A$$

Transformator

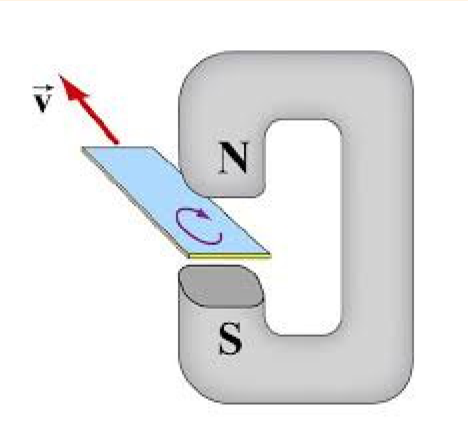


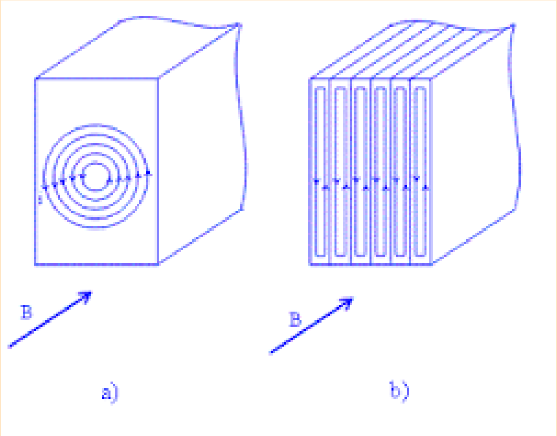
$$U_{wt} = -N_{wt}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

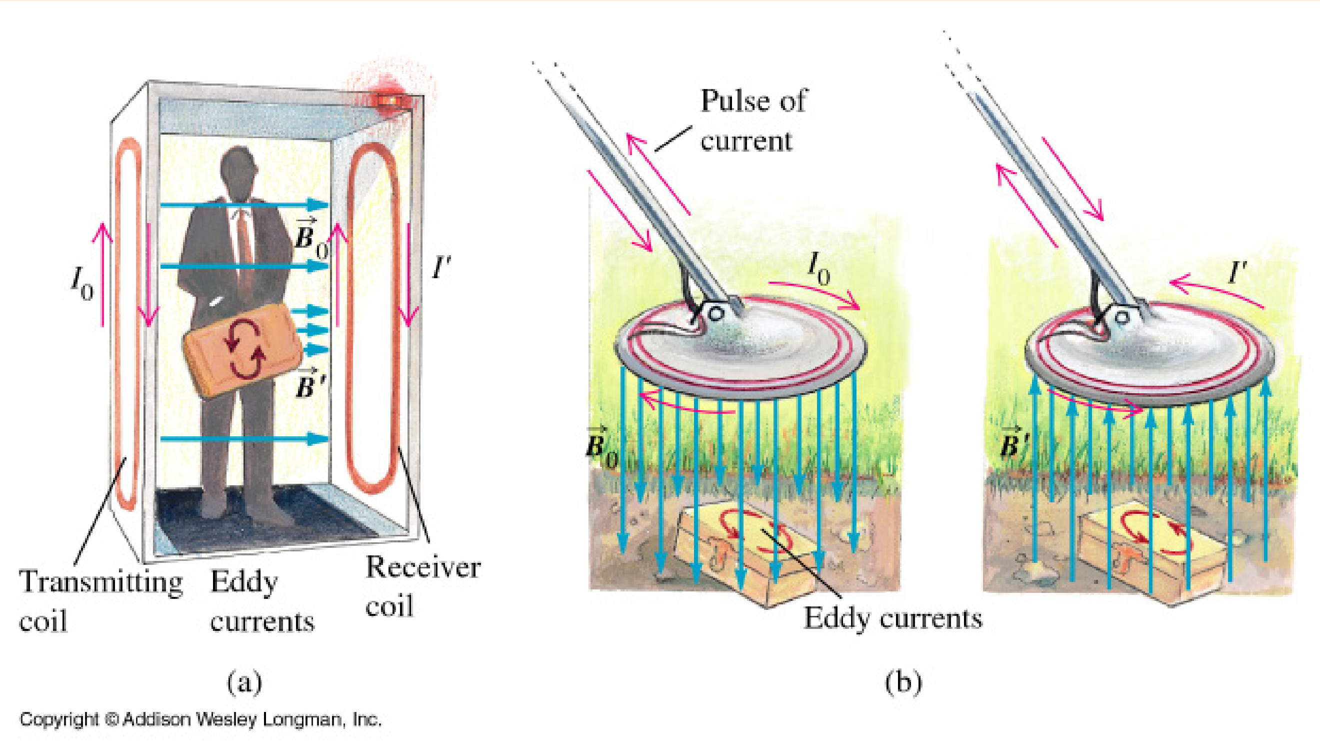
$$U_{pierw} = -N_{pierw}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\frac{U_{wt}}{U_{pierw}} = \frac{N_{wt}}{N_{pierw}}$$

Prądy wirowe

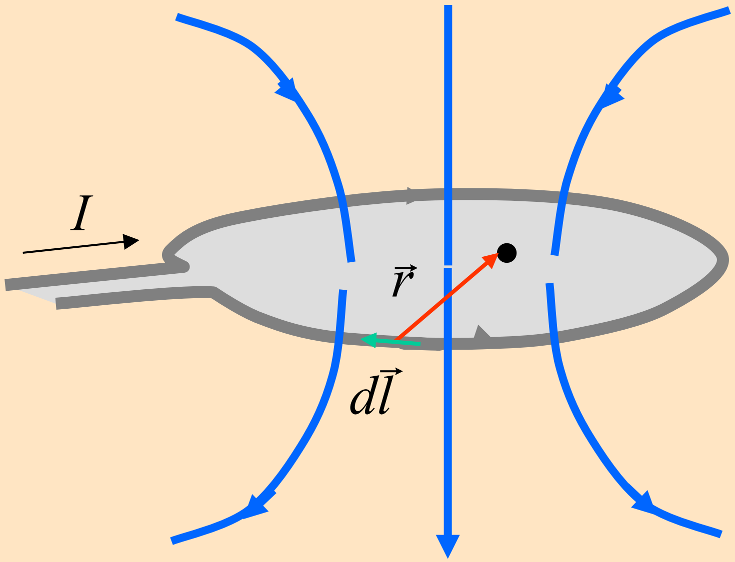






Indukcyjność

Obwód z prądem znajduje się zawsze w polu magnetycznym, które sam wytwarza



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{\vec{r}^3}$$

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_A \left[\int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{\vec{r}^3} \right] \cdot d\vec{A} = L \cdot I$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_A \left[\int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{\vec{r}^3} \right] \cdot d\vec{A}$$

L - indukcyjność
współczynnik samoindukcji

$$[\mathrm{L}] = \mathrm{H} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A}}$$

Przykład: Indukcyjność solenoidu o liczbie zwojów N, długości l i przekroju A

Indukcja

(z zaniedbaniem efektów brzegowych)

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}$$

Strumień

$$\Phi = N\Phi_1 = NBA = \mu_0 A \frac{N^2}{l} I$$

Indukcyjność

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 A \frac{N^2}{l}$$

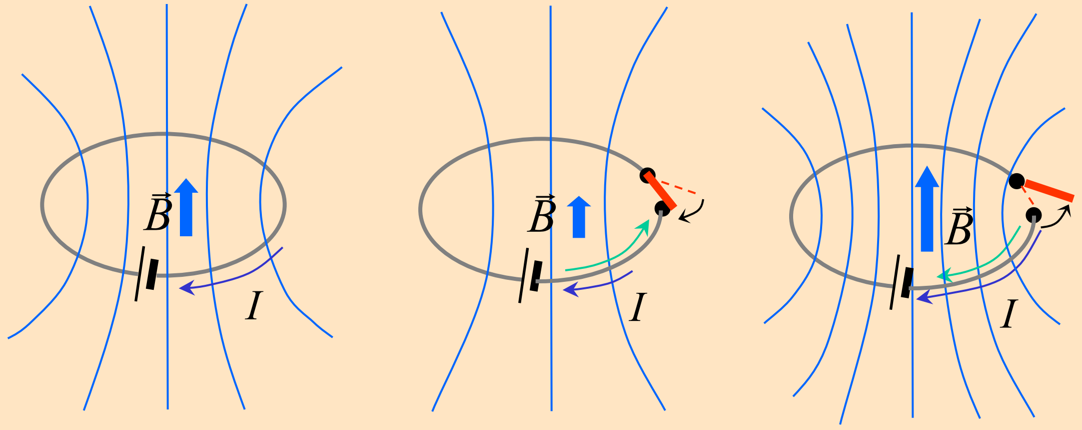
Samoindukcja

Zmiana natężenia prądu w obwodzie

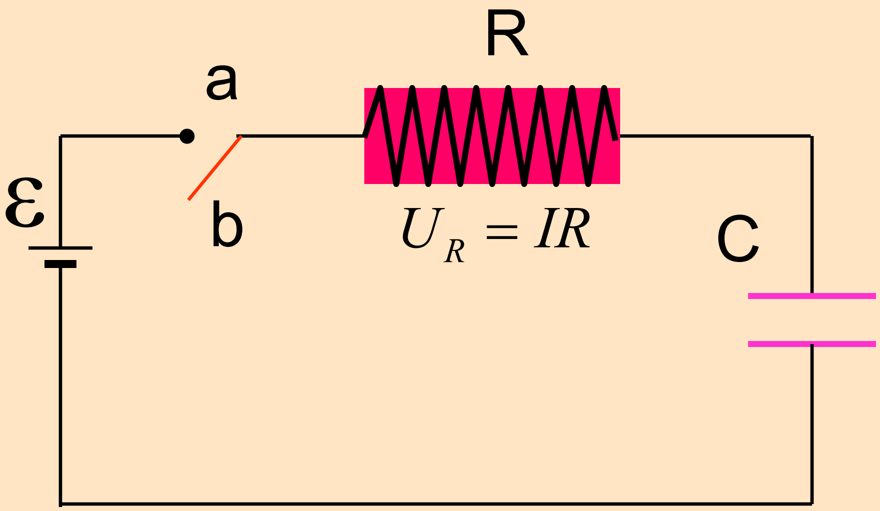
Zmiana własnego pola magnetycznego

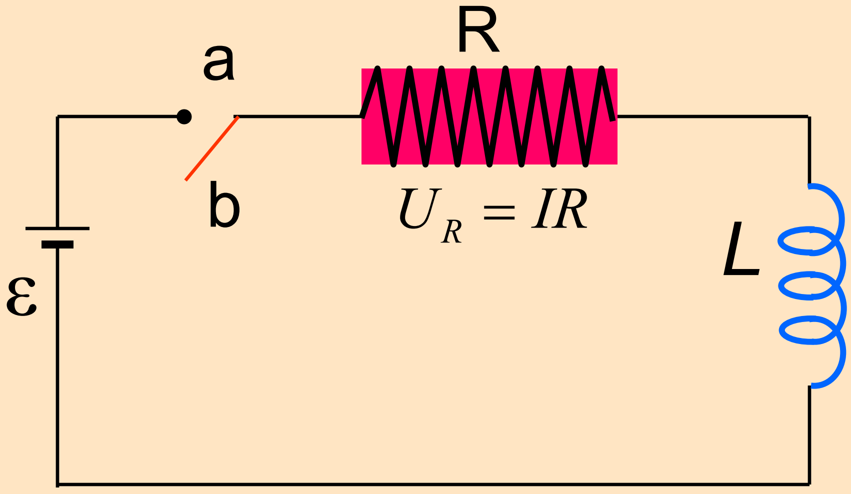
Siła elektromotoryczna samoindukcji

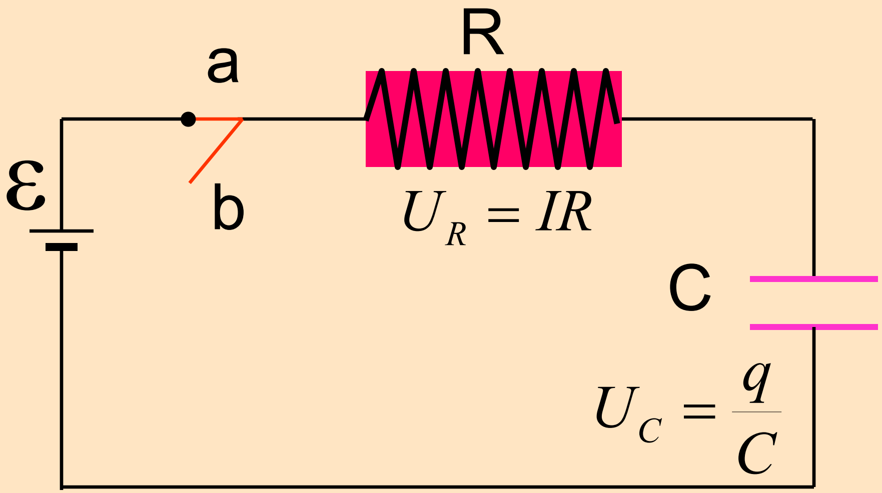
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(L \cdot i)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$



Obwody RC, RL







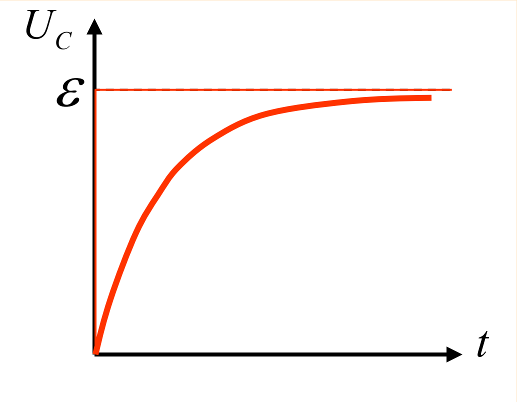
Obwód RC

$$\mathcal{E} = IR + \frac{q}{C} \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} R + \frac{q}{C}$$

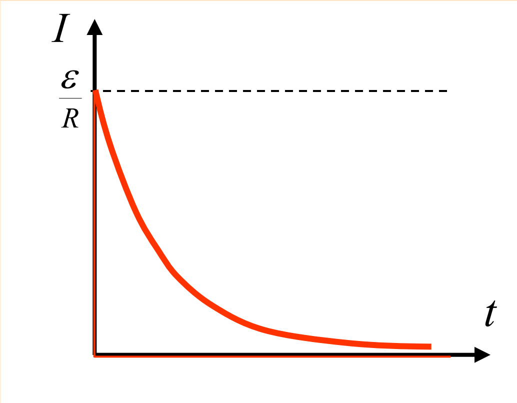
$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$$

$$U_C = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$$



Ładowanie kondensatora

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$



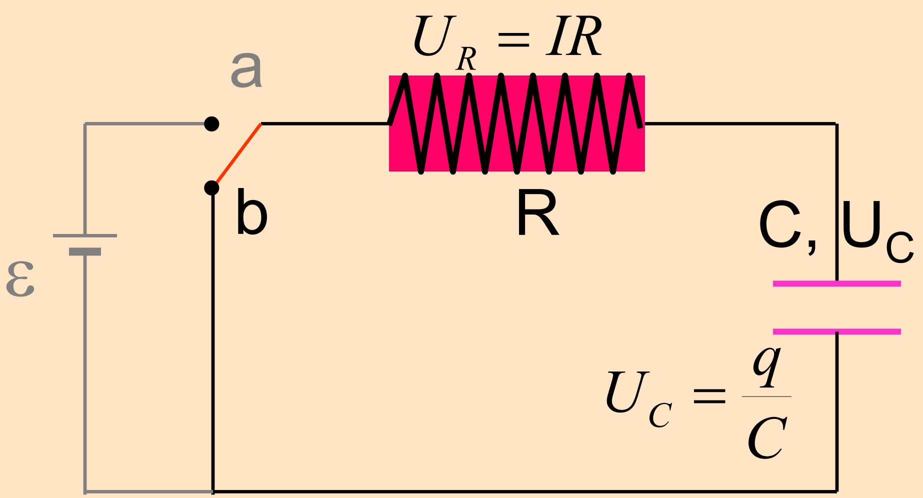
Stała czasowa

[RC] = s

Zadanie:
sprawdzić rozwiązania

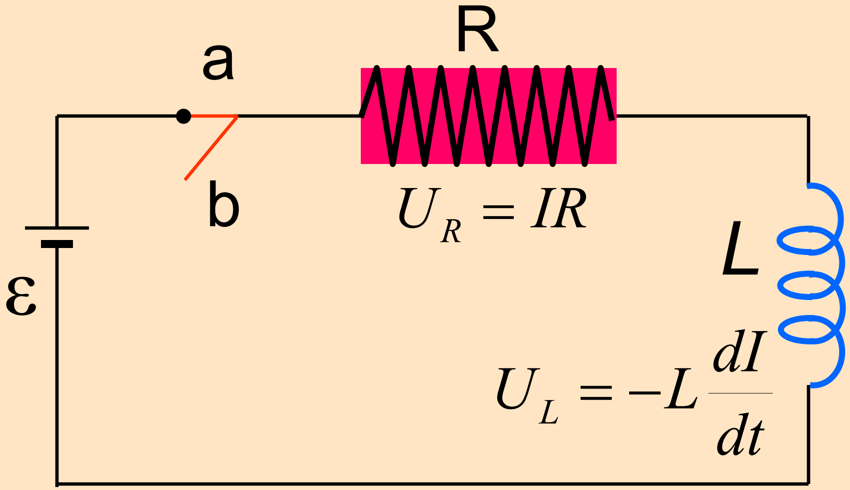
Obwód RC

Zadanie:
rozładowanie kondensatora



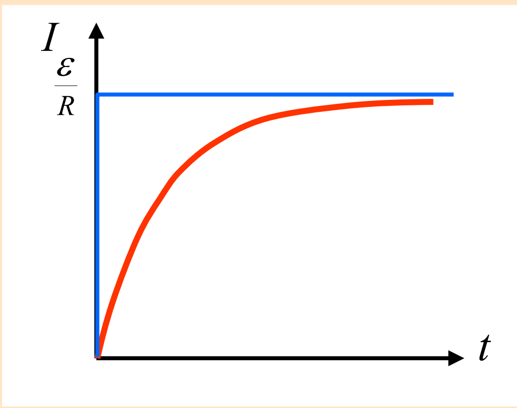
$$IR + \frac{q}{C} = 0$$

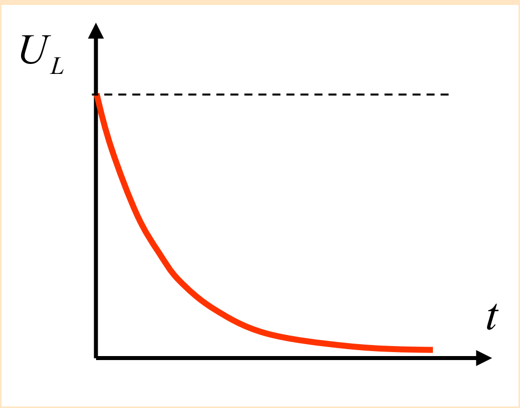
Obwód RL



$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$



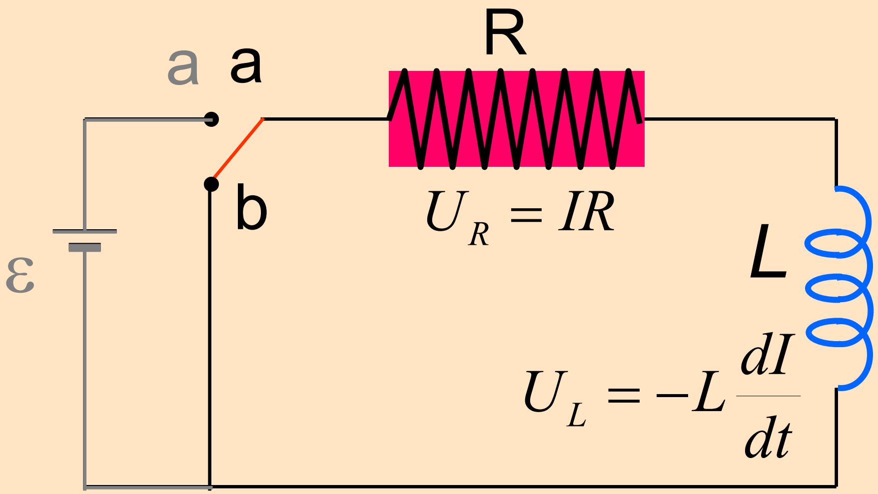


Stała czasowa

$$\left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}\right] = \mathrm{s}$$

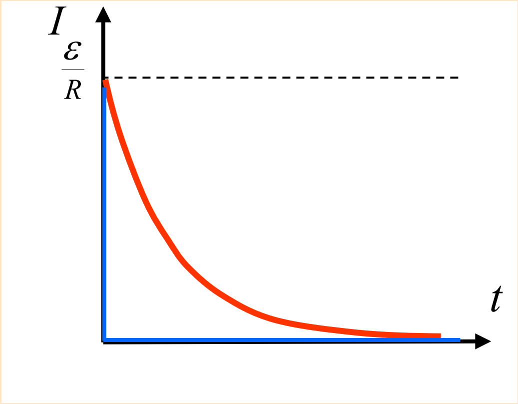
Zadanie:
sprawdzić rozwiązania

Obwód RL

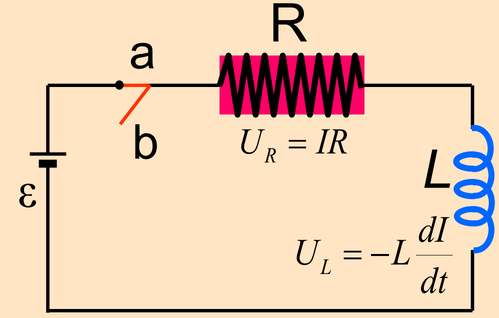


$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L}$$



Energia pola magnetycznego



$$\varepsilon = IR + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad \Big| \cdot I$$

$$\varepsilon I = I^2 R + LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$\varepsilon \frac{dq}{dt}$ Moc z jaką źródło przekazuje moc do obwodu

Moc Joul'a-Lenz'a

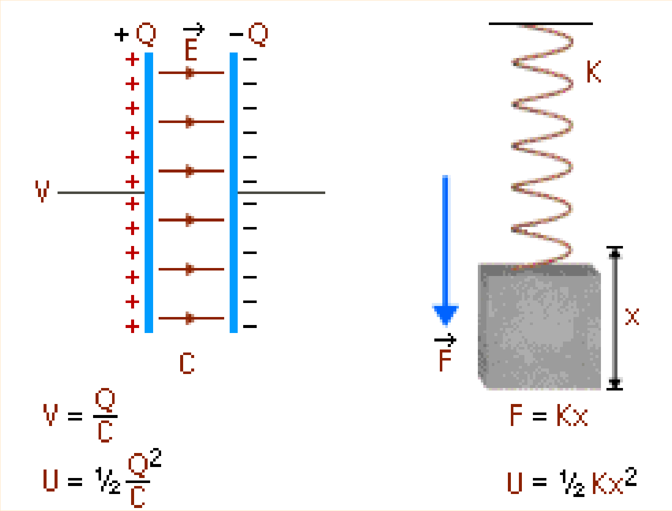
Szybkość gromadzenia energii w polu magnetycznym $\frac{\mathrm{d}W_B}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}W_B}{\mathrm{d}t} = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad dW_B = LI\mathrm{d}I$$

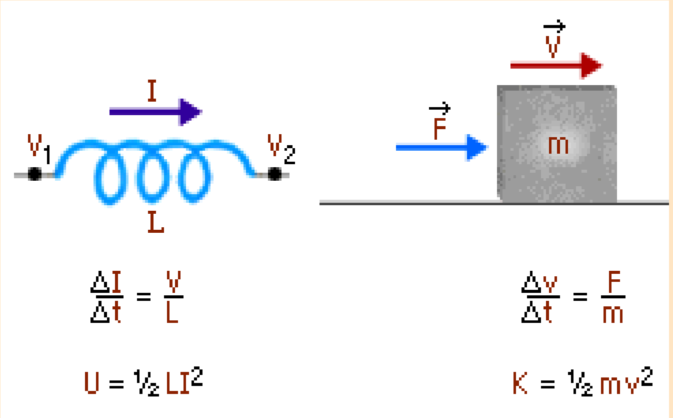
$$W_B = \int_0^I \mathrm{d}W_B = \int_0^I LI\mathrm{d}I = \frac{1}{2}LI^2$$

$$W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Analogie
mechaniczno -elektromagnetyczne

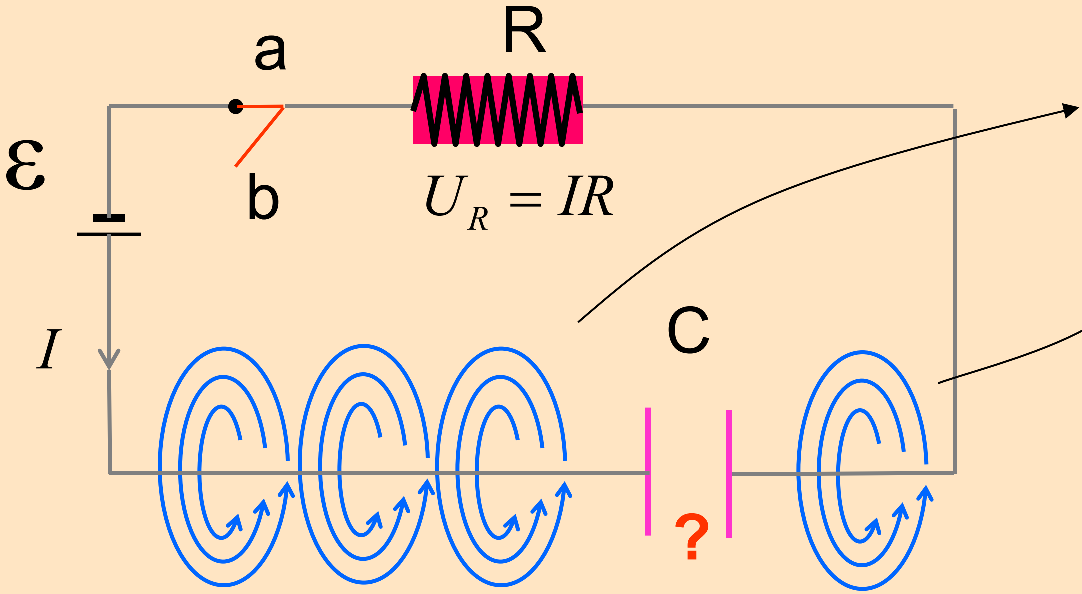


$$W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$



$$W_B = \frac{1}{2}LI^2$$

Rozszerzenie Prawa Ampera



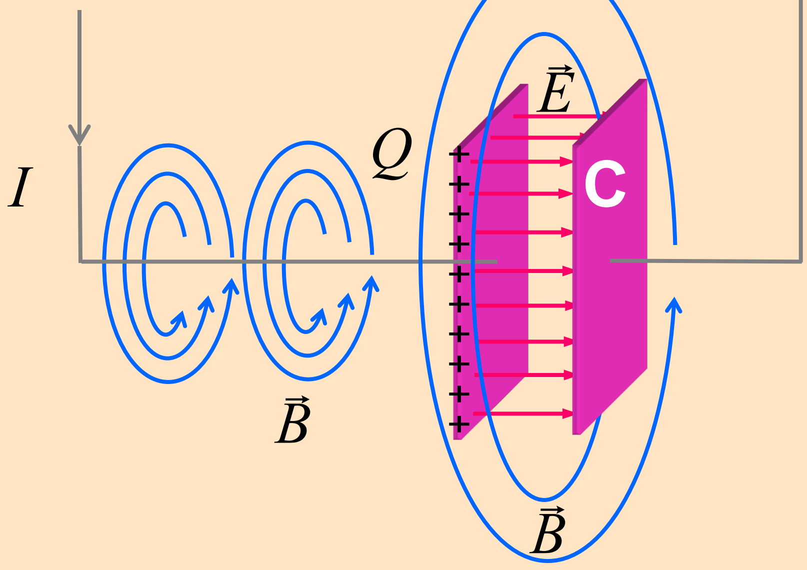
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Pole magnetyczne opisane prawem Ampera

Zmieniający się prąd I w obwodzie jest „uzupełniony” polem elektrycznym zmieniającym się między okładkami kondensatora

Rozszerzenie Prawa Ampera

$$E = \frac{V}{d} \qquad C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$



Zmieniający się prąd I w obwodzie jest „uzupełniony" polem elektrycznym zmieniającym się między okładkami kondensatora

$$Q = C \cdot V =$$

$$= C \cdot d \cdot E = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot d \cdot E = \varepsilon_0 E \cdot A = \varepsilon_0 \Phi_E$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}_{I_p}$$

I_p - prąd przesunięcia

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Równania Maxwella dla pól elektromagnetycznych

Prawo Gaussa
dla elektryczności

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

Źródłem pola elektrycznego jest ładunek

Prawo Faradaya

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Wokół zmiennego pola magnetycznego powstaje wirowe pole elektryczne

Prawo Gaussa
dla magnetyzmu

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

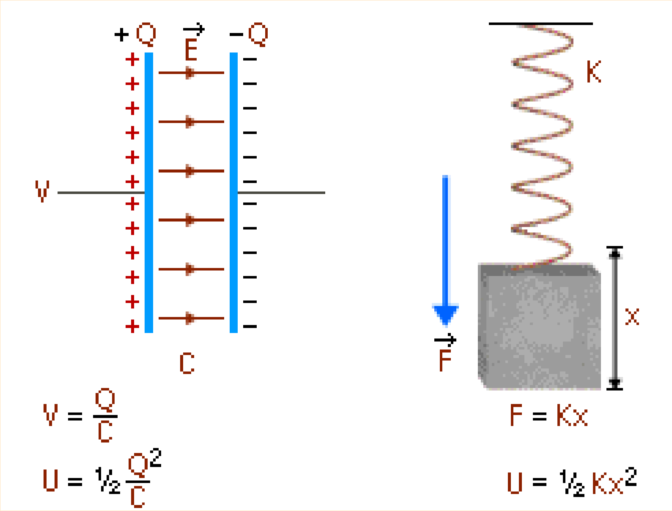
Nie ma izolowanych biegunów magnetycznych

Rozszerzone Prawo Ampera

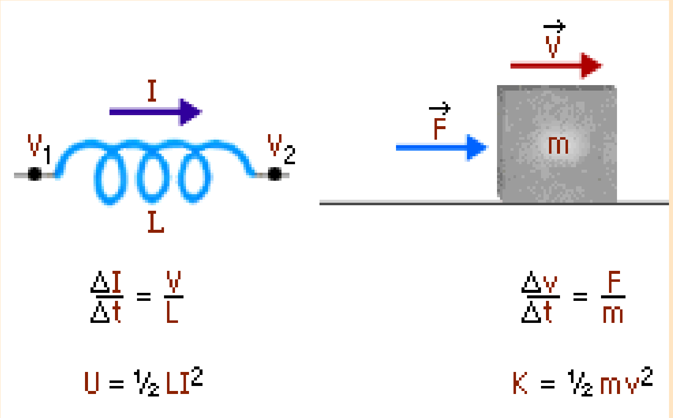
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Źródłem wirowego pola magnetycznego jest prąd lub zmienne pole elektryczne

Analogie mechaniczno -elektromagnetyczne

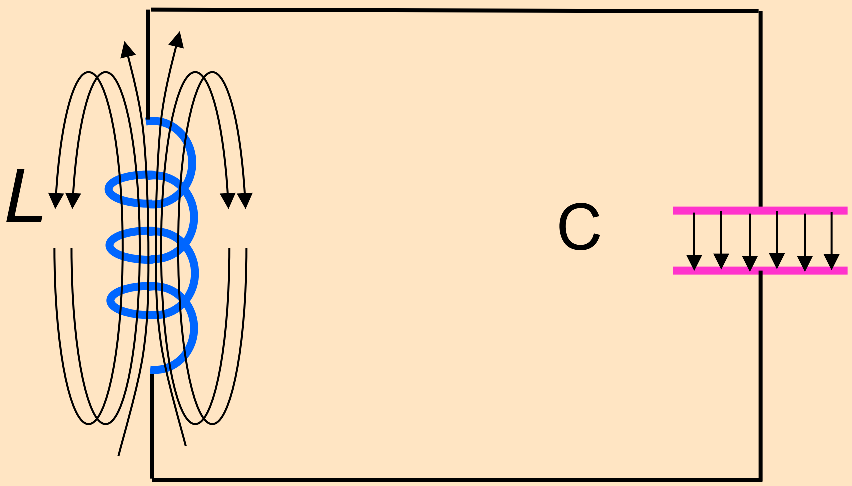


$$W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$



$$W_B = \frac{1}{2}LI^2$$

Drgania obwodu LC



$$\frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt} \qquad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Równanie oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega_0^2}x = 0$$

Analogie:

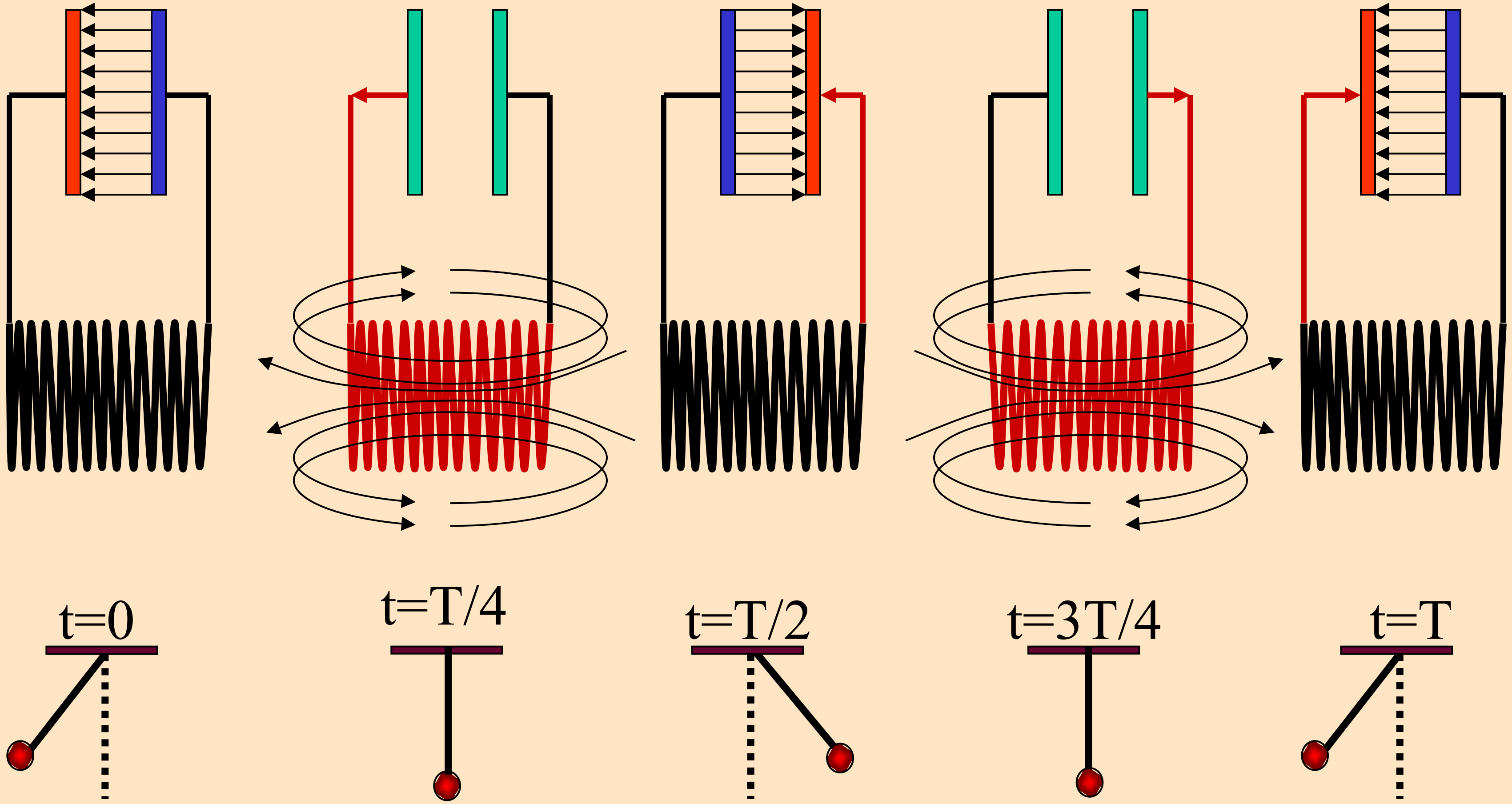
$$x \rightarrow q \quad \mathrm{v} \rightarrow i \quad m \rightarrow L \quad k \rightarrow \frac{1}{C}$$

$$q = q_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \omega_0^{\ 2} = \frac{1}{LC}$$

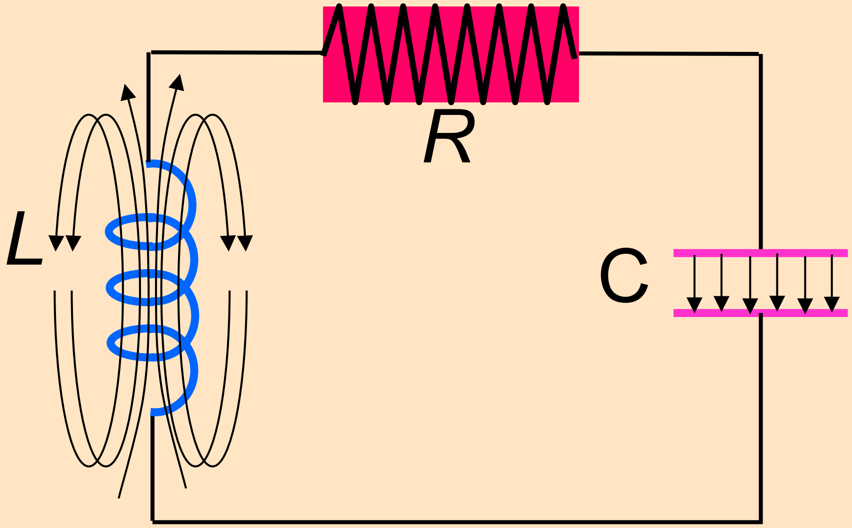
Analogia mechaniczno - elektromagnetyczna

$$W_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

$$W_B = \frac{1}{2}LI^2$$



Elektryczne drgania tłumione obwodu RLC



$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} + IR \qquad I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

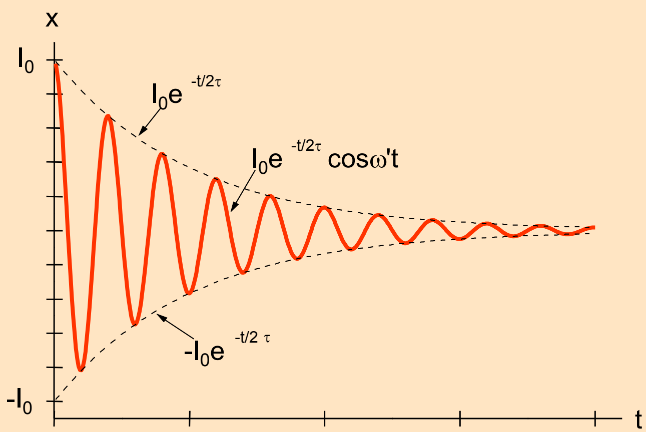
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \overbrace{\frac{b}{m}}^{2\beta}\frac{dx}{dt} + \overbrace{\frac{k}{m}}^{\omega_0^2}x = 0$$

Równanie oscylatora harmonicznego tłumionego, ciepło J - L wydzielane na oporze R prowadzi do strat energii

Analogie: $x \to q \quad \mathrm{v} \to i \quad m \to L \quad k \to \frac{1}{C} \quad b \to R$

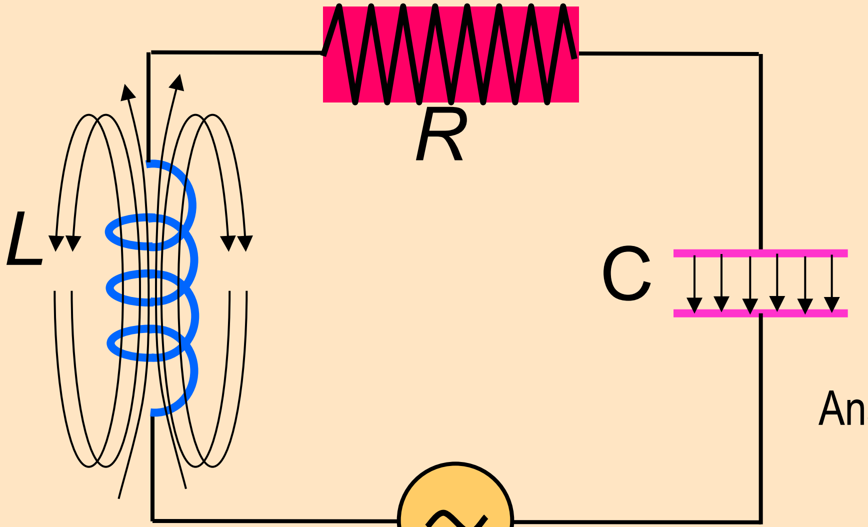
Słabe tłumienie $\omega_0 > \beta$

$$I = I_0 e^{-t/2\tau}\cos\omega' t$$



$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad 2\beta = \frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}$$

Elektryczne wymuszone drgania tłumione obwodu RLC



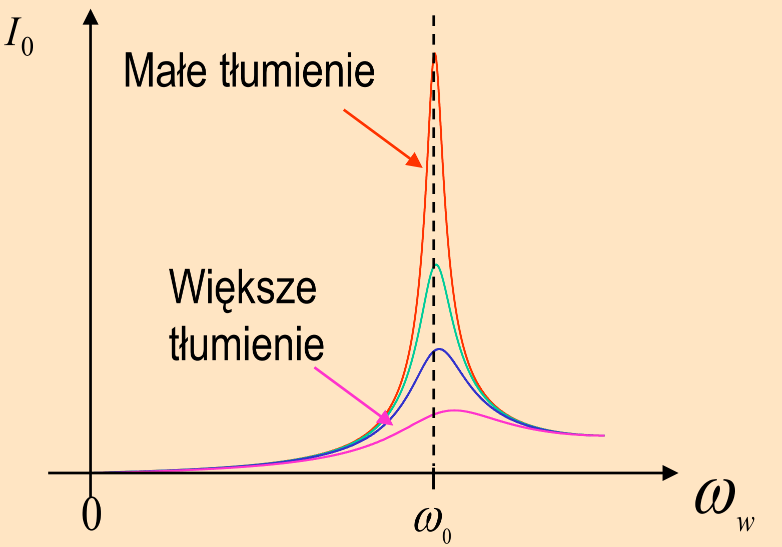
$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega_w t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \mathcal{E}_0 \sin \omega_w t$$

Analogie: $x \to q \quad \mathrm{v} \to i \quad m \to L \quad k \to \frac{1}{C} \quad b \to R$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 \cos(\omega_w t + \varphi)$$

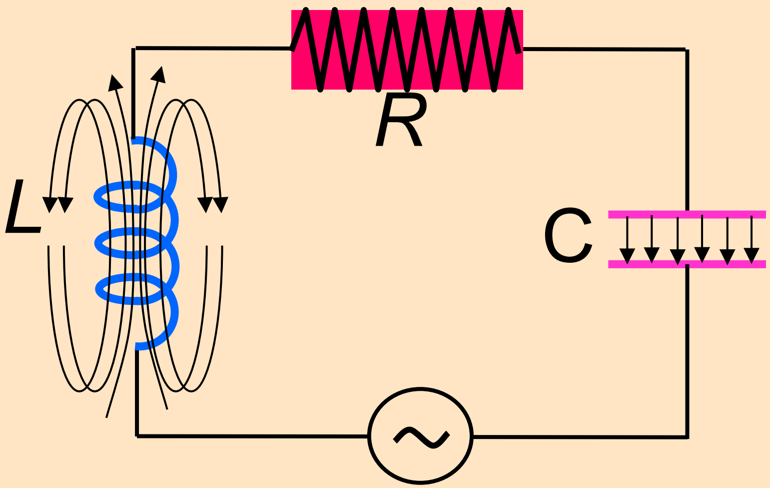
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_w L - \frac{1}{\omega_w C}\right)^2}}$$



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_w = \omega_0$ rezonans

Elektryczne wymuszone drgania tłumione obwodu RLC



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega_w t$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega_w t + \varphi)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_w L - \dfrac{1}{\omega_w C}\right)^2}}$$

Związek między I_0 oraz $\mathcal{E}_0$ ma postać prawa Ohma

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \qquad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

gdzie Z (impedancja, zawada) odgrywa rolę oporu

Zadania

Jakie są przesunięcia fazowe między prądem a napięciem:

A. w obwodzie RC

B. w obwodzie RL