Ruch harmoniczny

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Siła sprężysta - siła centralna ale inna niż grawitacji

$$\vec{F} \equiv -k\vec{r}$$

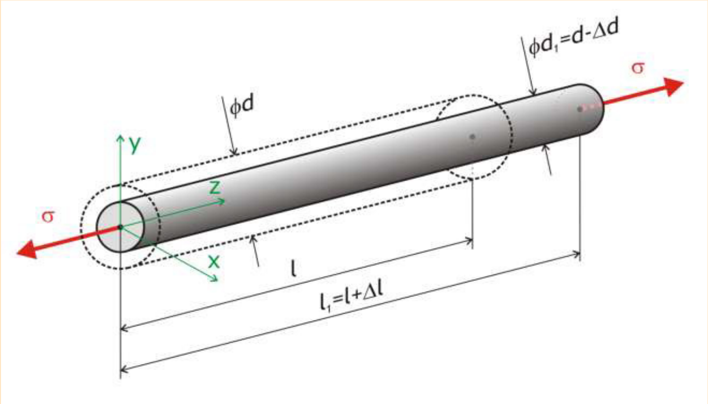
Równanie ruchu, II zasada dynamiki:

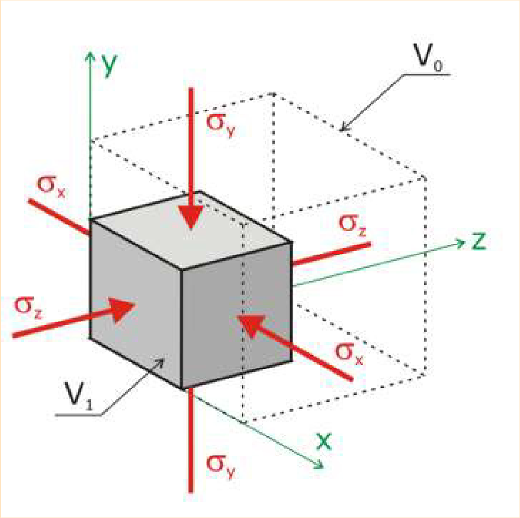
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

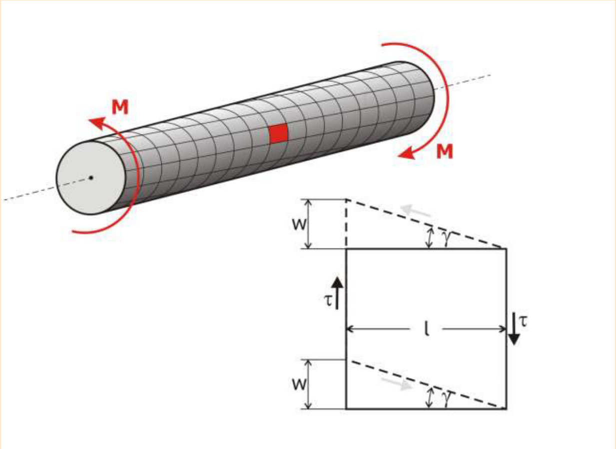
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\vec{r}, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

Siły sprężystości

Podstawową cechą sił sprężystości jest proporcjonalność siły do odkształcenia.







Ciało nazywamy doskonale sprężystym jeśli po ustąpieniu sił deformujących wraca całkowicie do postaci pierwotnej.

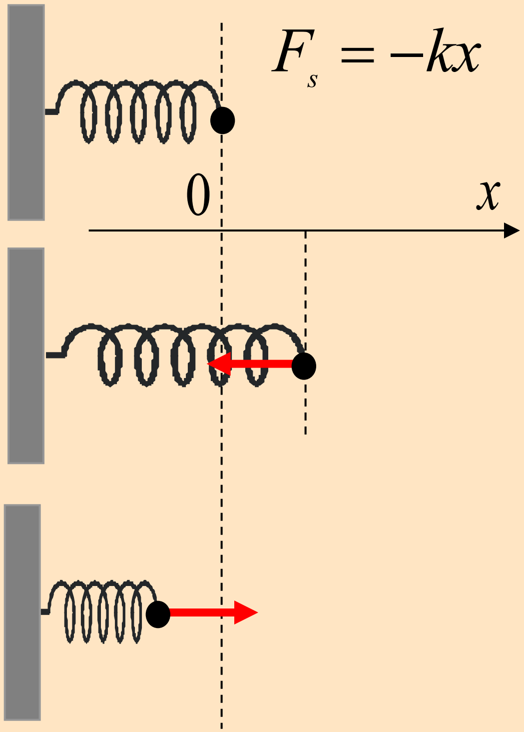
Naprężenie: $\sigma = \frac{F}{S}$ Prawo Hooke'a: $\sigma = E\frac{\Delta l}{l}$

E - moduł Young'a (sprężystości podłużnej)

Ruch harmoniczny -przypadek jednowymiarowy

Siła sprężysta (z prawa Hook'a)

$$\boxed{F \equiv -k\,x}$$



Równanie ruchu, II zasada dynamiki:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Rozwiązanie (odgadnięte)

$$x = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t =$$
$$= A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$A\cos(\omega_0 t + \varphi) =$$
$$= A\cos\omega_0 t\cos\varphi - A\sin\omega_0 t\sin\varphi$$
$$A_1 = A\cos\varphi \qquad A_2 = -A\sin\varphi$$

Rozwiązaniem jest ruch harmoniczny prosty o częstości kołowej ω_0, amplitudzie A i fazie ϕ

Rozwiązaniem jest ruch harmoniczny prosty o częstości ω_0, amplitudzie A i fazie ϕ

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Faza określa warunki początkowe ruchu
jeśli $\phi=0$, $x(t_0=0)=A$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -v_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

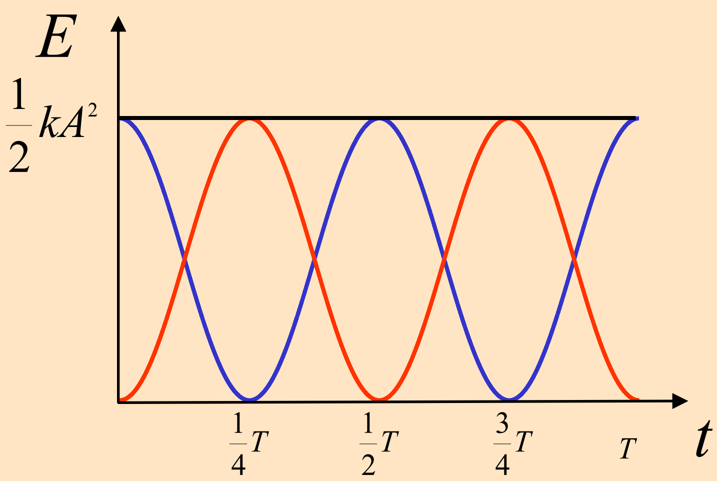
$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \qquad T = \frac{1}{f}$$

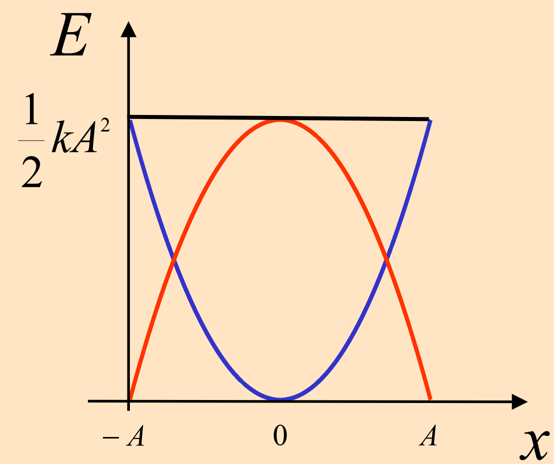
Energia w ruchu harmonicznym

Energia potencjalna $$\boxed{U = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2 \omega_0 t}$$

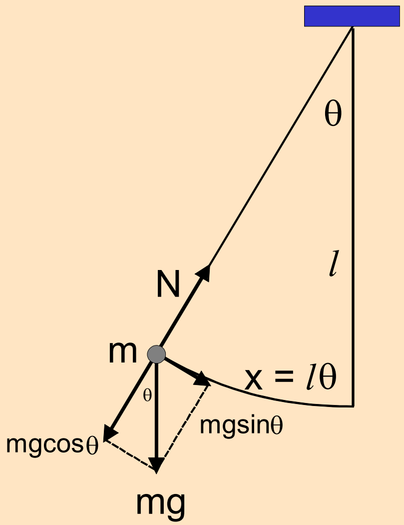
Energia kinetyczna $$E_k = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 = \boxed{\frac{k}{2}\left(A^2 - x^2\right)} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \boxed{\frac{k}{2} A^2 \sin^2 \omega_0 t}$$

Energia całkowita $$E_{TOT} = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2$$





Przykład ruchu harmonicznego: Wahadło matematyczne



$$F = -mg\sin\theta$$

Dla małych kątów

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Przypadek trójwymiarowy

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

Równanie ruchu, II zasada dynamiki:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\vec{r}, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{A}_1}_{\vec{r}_0}\cos\omega_0 t + \vec{A}_2\sin\omega_0 t$$

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = -\vec{A}_1\omega_0\sin\omega_0 t + \underbrace{\vec{A}_2\omega_0}_{\vec{\mathrm{v}}_0}\cos\omega_0 t$$

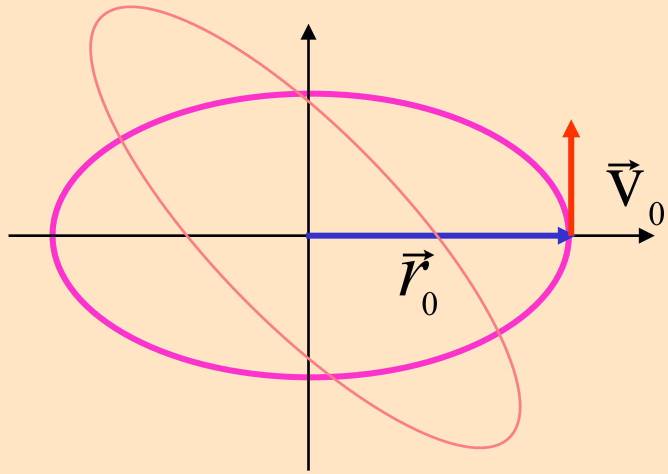
$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0\cos\omega_0 t + \frac{\vec{\mathrm{v}}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$$

Ruch jest płaski,
Można zawsze sprowadzić
do dwóch wymiarów

Przypadek dwuwymiarowy

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos\omega_0 t + \frac{\vec{\mathrm{v}}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

$$\vec{r}_0 = (r_0, 0) \qquad \vec{\mathrm{v}}_0 = (0, \mathrm{v}_0)$$



$$x(t) = r_0 \cos\omega_0 t$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{(\mathrm{v}_0/\omega_0)^2} = 1$$

$$x(t) = A_x \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$$

Zadanie

Dla jakich wartości amplitud i faz otrzymujemy równanie:

- koła,
- elipsy symetrycznej względem osi
- elipsy symetrycznej względem prostej x=y
- równanie prostej y=ax :

Oscylator tłumiony

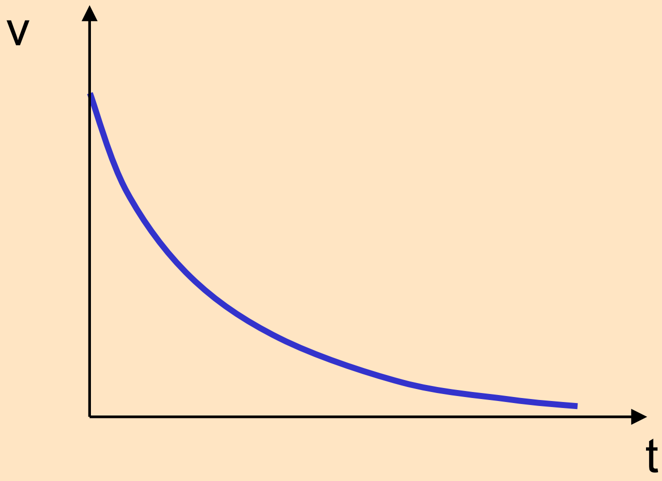
Siła oporu (tłumiąca)

$$F_{op} = -b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Równanie ruchu

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$m\frac{\mathrm{d}\mathrm{v}}{\mathrm{d}t} = -b\mathrm{v}$$



$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 e^{-t/\tau} \qquad \tau = \frac{m}{b}$$

Oscylator tłumiony

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad 2\beta = \frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}$$

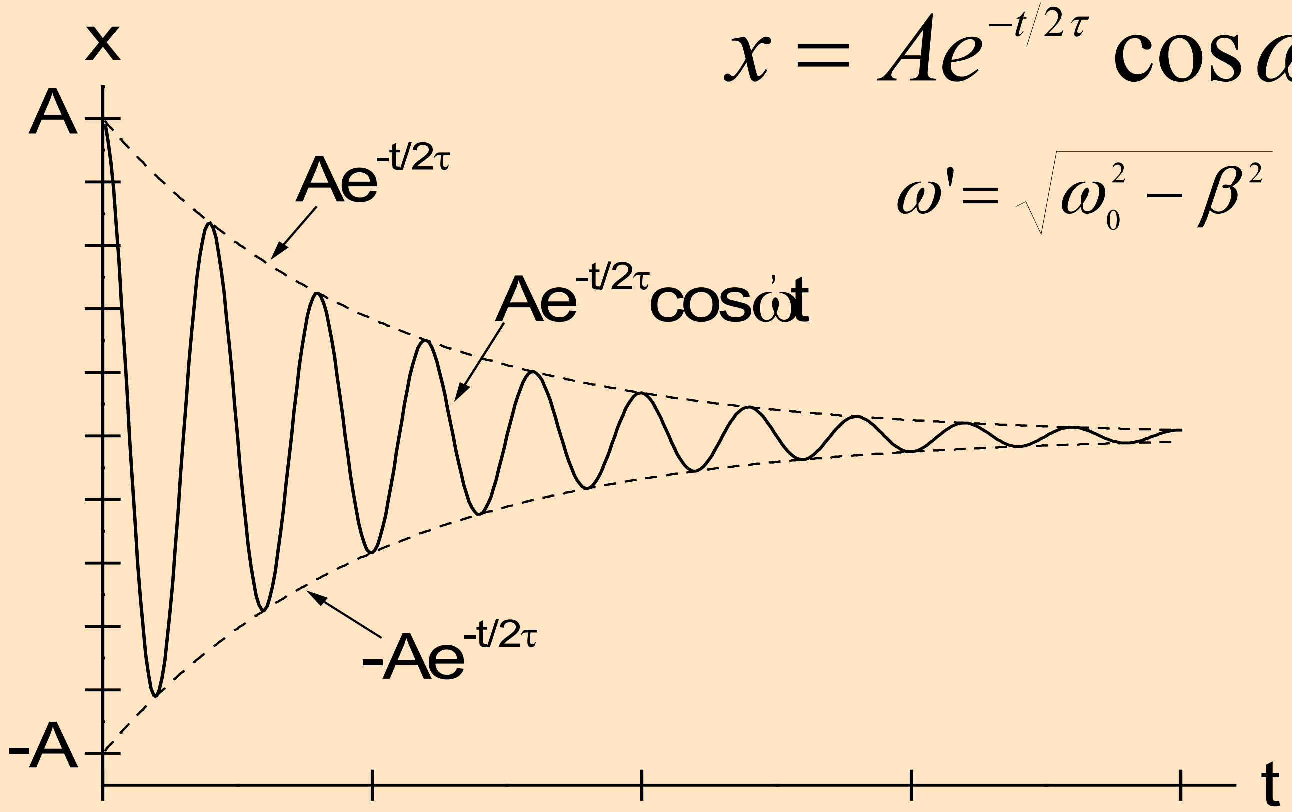
Oscylator tłumiony

Słabe tłumienie

$$\omega_0 > \beta$$

$$x = Ae^{-t/2\tau}\cos\omega' t$$

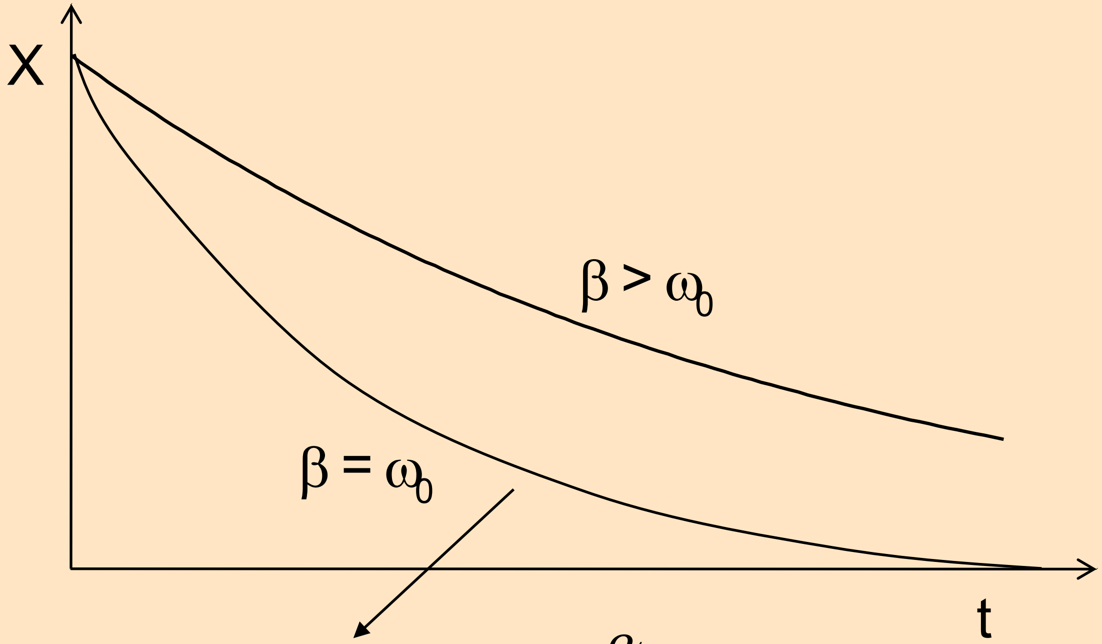
$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



Oscylator tłumiony

Silne tłumienie

$$\omega_0 \leq \beta$$



$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$

Straty energii w ruchu tłumionym

Współczynnik dobroci Q

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{E_{\text{zmagazynowana}}}{E_{\text{stracona w 1 okresie}}} = 2\pi \frac{E}{P/v}}$$

Słabe tłumienie

$$\approx \omega_0 \tau$$

P - średnia strata mocy, v częstotliwość

Oscylator	Q
Ziemia dla fali sejsmicznej	250-400
Struna fortepianu lub skrzypiec	1000
Atom wzbudzony	10^7
Jądro wzbudzone	10^{12}

Oscylator wymuszony

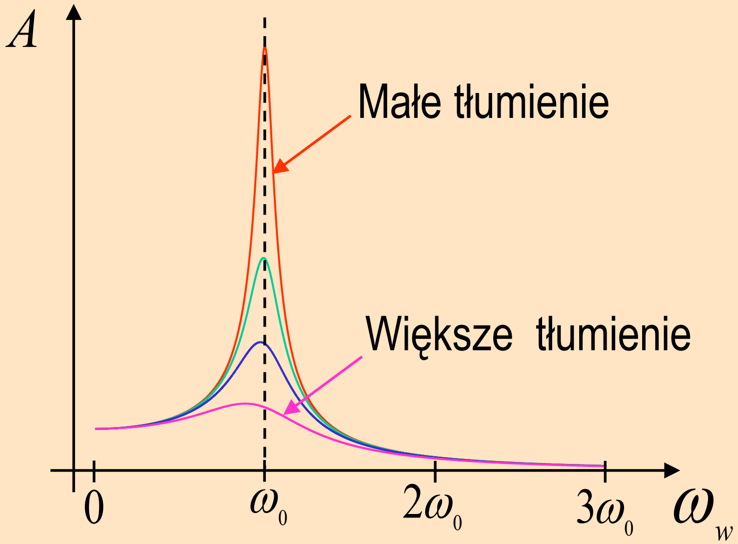
Siła wymuszająca (okresowa)

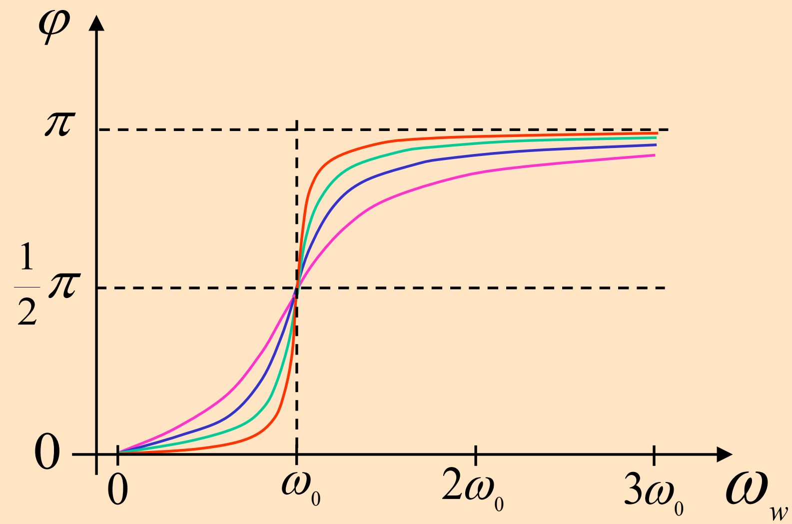
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

$$F(t)=F_0\cos\omega_w t$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\alpha_0\cos\omega_w t}\quad \alpha_0=\frac{F_0}{m}$$

$$\boxed{x(t)=A\cos(\omega_w t+\varphi)}$$

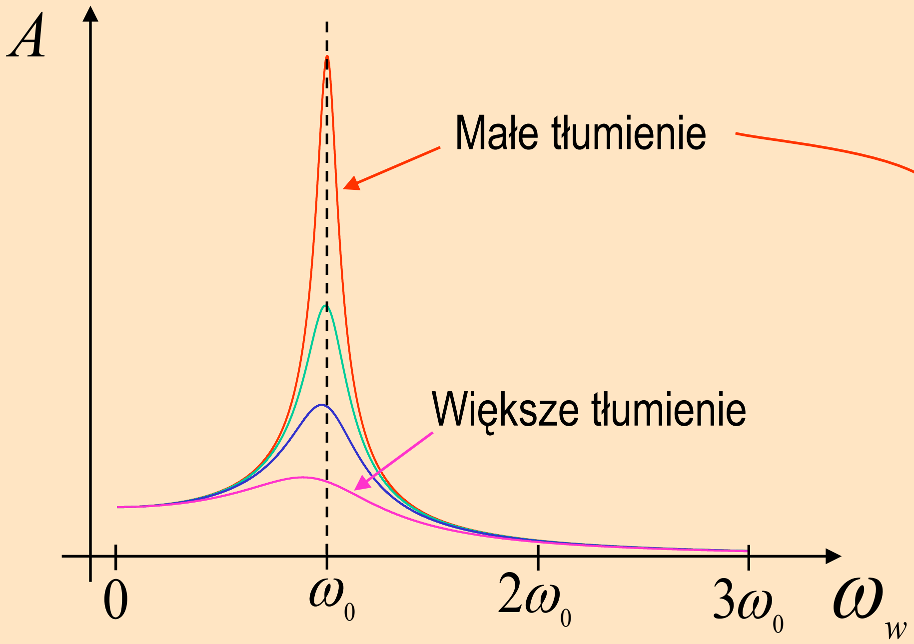




$$A=\frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2-\omega_w^2)^2+(\omega_w/\tau)^2]^{1/2}}$$

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_w/\tau}{(\omega_0^2-\omega_w^2)}$$

Rezonans

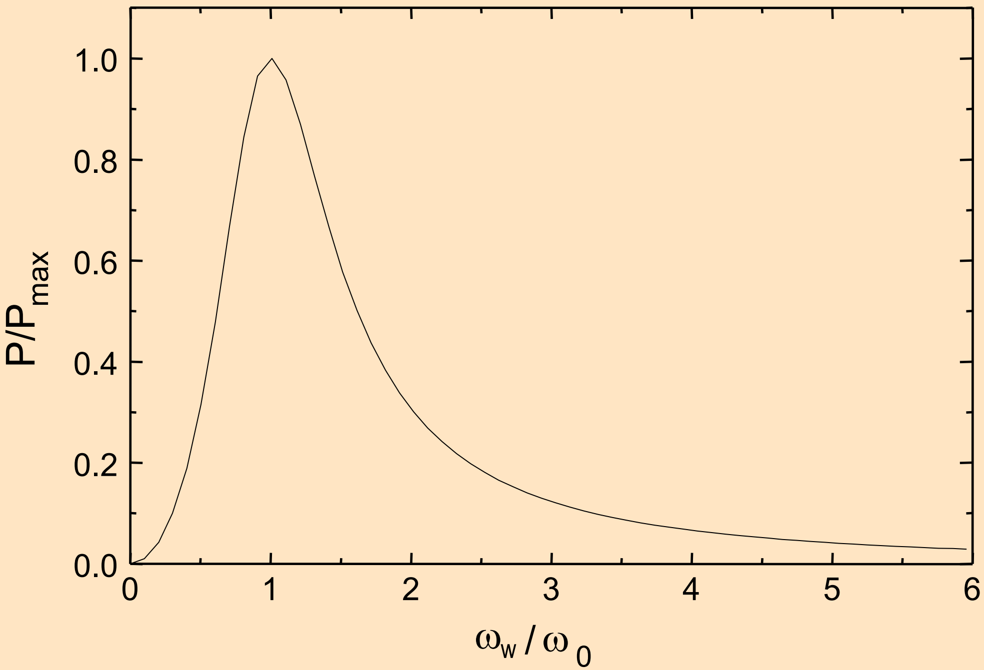


$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}} \approx \omega_0$$

Rezonans - moc absorbowana

$$\overline{P} = \overline{F\mathrm{v}} = \overline{F\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2} m \alpha_0^2 \frac{\omega_w^2/\tau}{(\omega_0^2 - \omega_w^2)^2 + (\omega_w/\tau)^2}$$



Składanie drgań o różnych częstościach:
Krzywe Lissajous

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

$\dfrac{\omega_x}{\omega_y}$ wymierne $\Rightarrow$ krzywe zamknięte (periodyczne)

$\dfrac{\omega_x}{\omega_y}$ niewymierne $\Rightarrow$ krzywe otwarte (nieperiodyczne)