Elektrostatyka

Za oddziaływania elektryczne (i magnetyczne) odpowiedzialny jest:

ładunek elektryczny

Ładunek jest skwantowany

Ładunek elementarny $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C (D. Millikan).

Wszystkie ładunki są wielokrotnością e.

Zasada zachowania ładunku - B. Franklin.

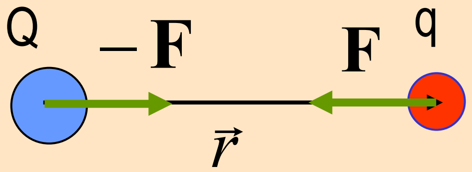
Wypadkowy ładunek w układzie zamkniętym jest stały.

Dwa rodzaje ładunków

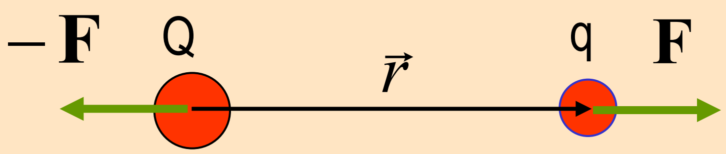
+ *(proton)* **- *(elektron)***

Prawo Coulomba

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



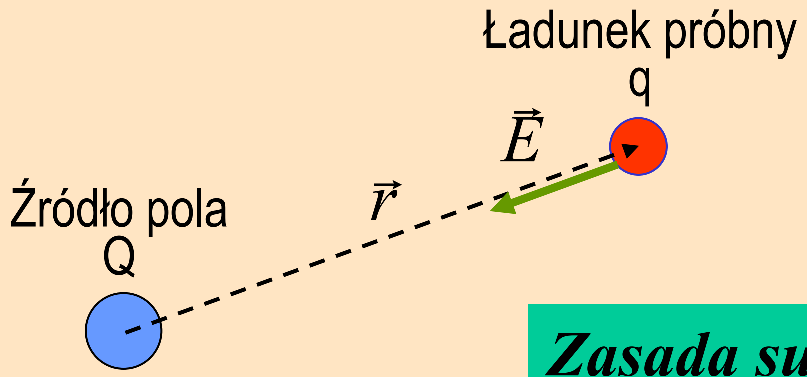
$$\boxed{\vec{F} = k\frac{Q \cdot q}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}$$



$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N \cdot m}^2}$$

Natężenie pola elektrycznego



$$\vec{E} \overset{def}{=} \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

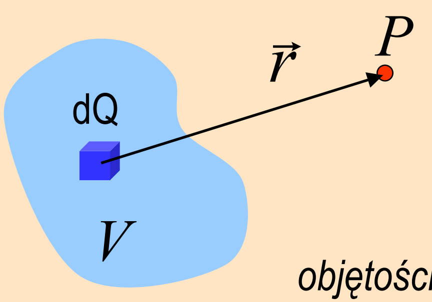
dla ładunku punktowego

Zasada superpozycji

‘n’ ładunków punktowych Q_i

$$\vec{E} = \sum_{1}^{n} \vec{E}_i \quad , \quad \vec{E}_i = k\frac{Q_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$$

Ciągły rozkład ładunku



Gęstość ładunku

objętościowa $\rho = \frac{dQ}{dV} = \rho(x,y,z)$

powierzchniowa $\sigma = \frac{dQ}{dS}$

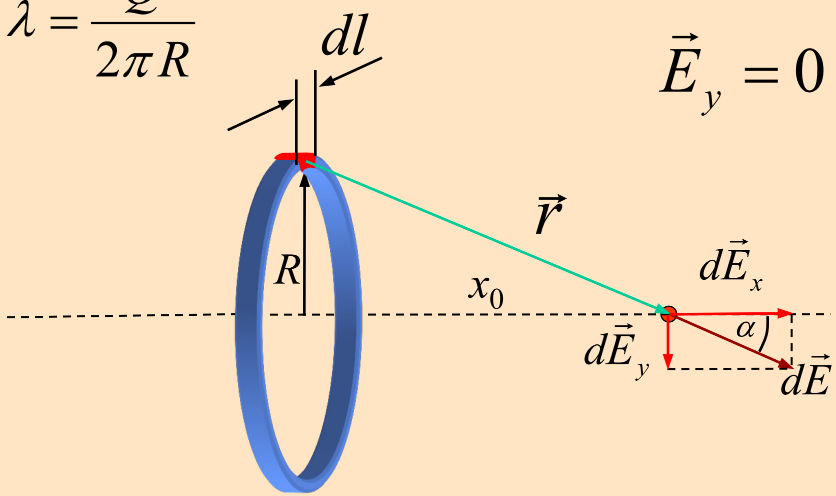
liniowa $\lambda = \frac{dQ}{dl}$

$$\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r}\frac{dQ}{r^2} =$$

$$= \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\rho}{r^2}dV$$

Przykład obliczania $\vec{E}$

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$



$$\vec{E}_y = 0$$

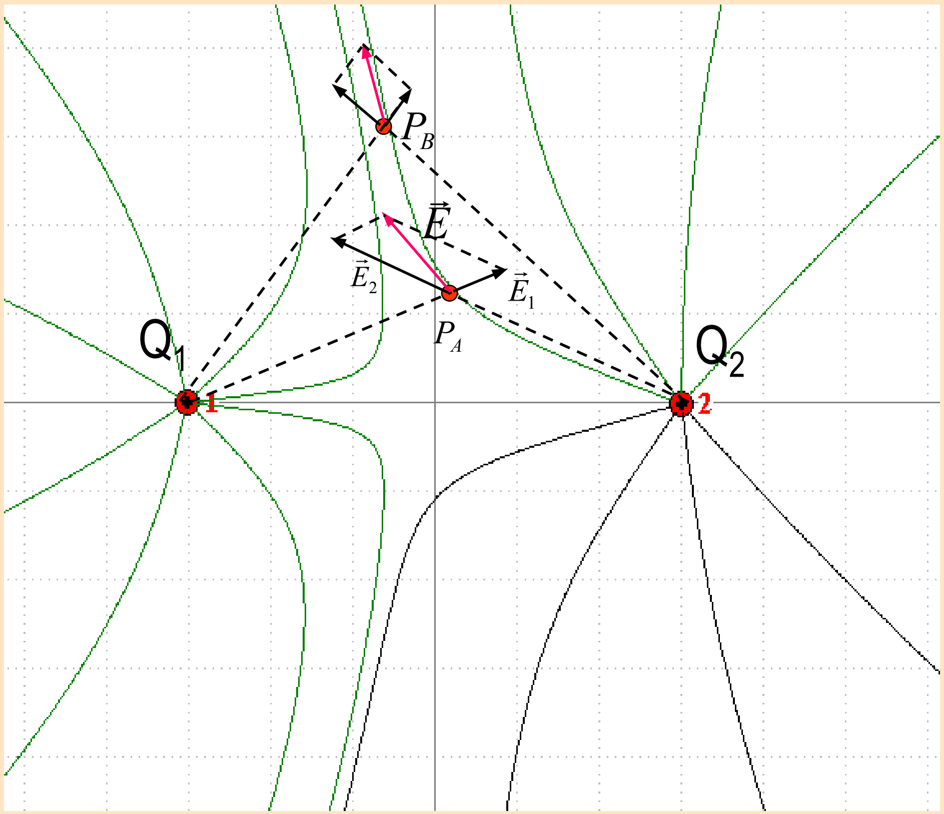
$$dE_x = dE\cos\alpha = dE\,\frac{x_0}{r}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}$$

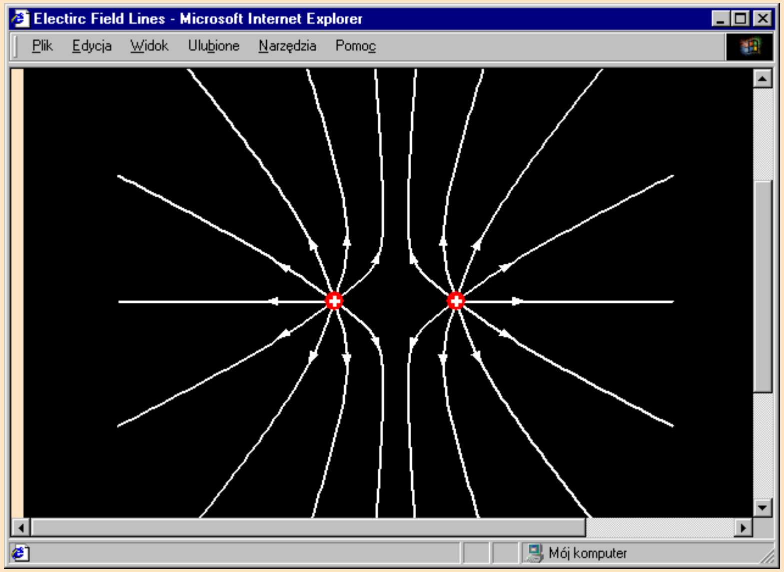
$$E = E_x = \int_l dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda dl}{r^2}\frac{x_0}{r} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_0}{r^3}\int_l dl = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_0}{r^3}2\pi R = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x_0 Q}{\left(x_0^2 + R^2\right)^{3/2}}}$$

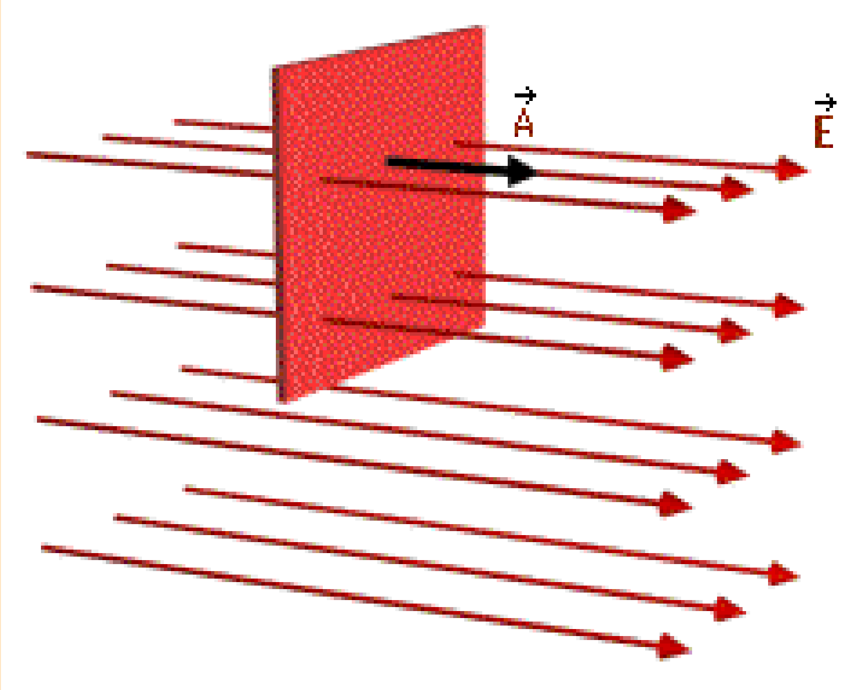
Przykład obliczania $\vec{E}$ - linie sił

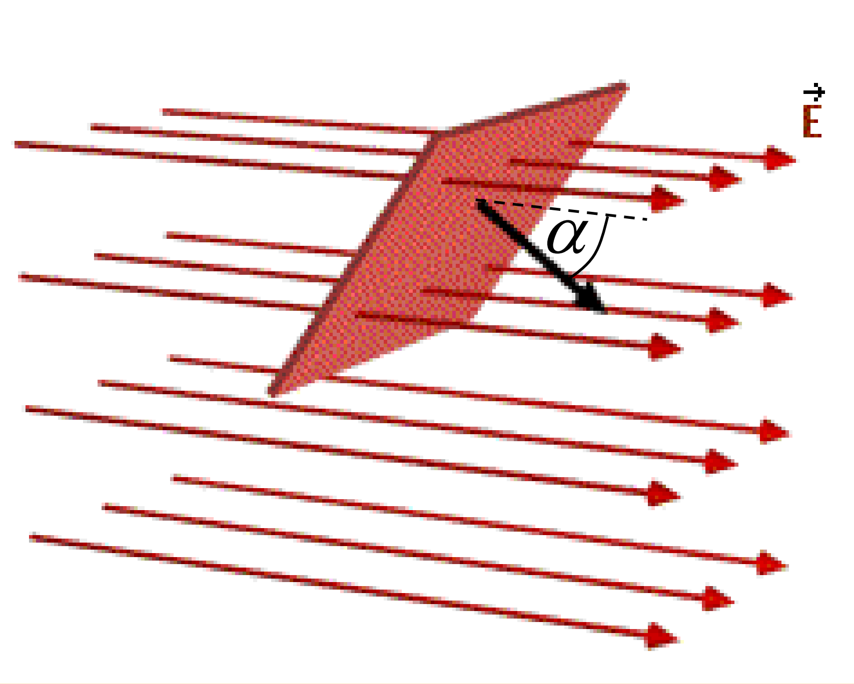


$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



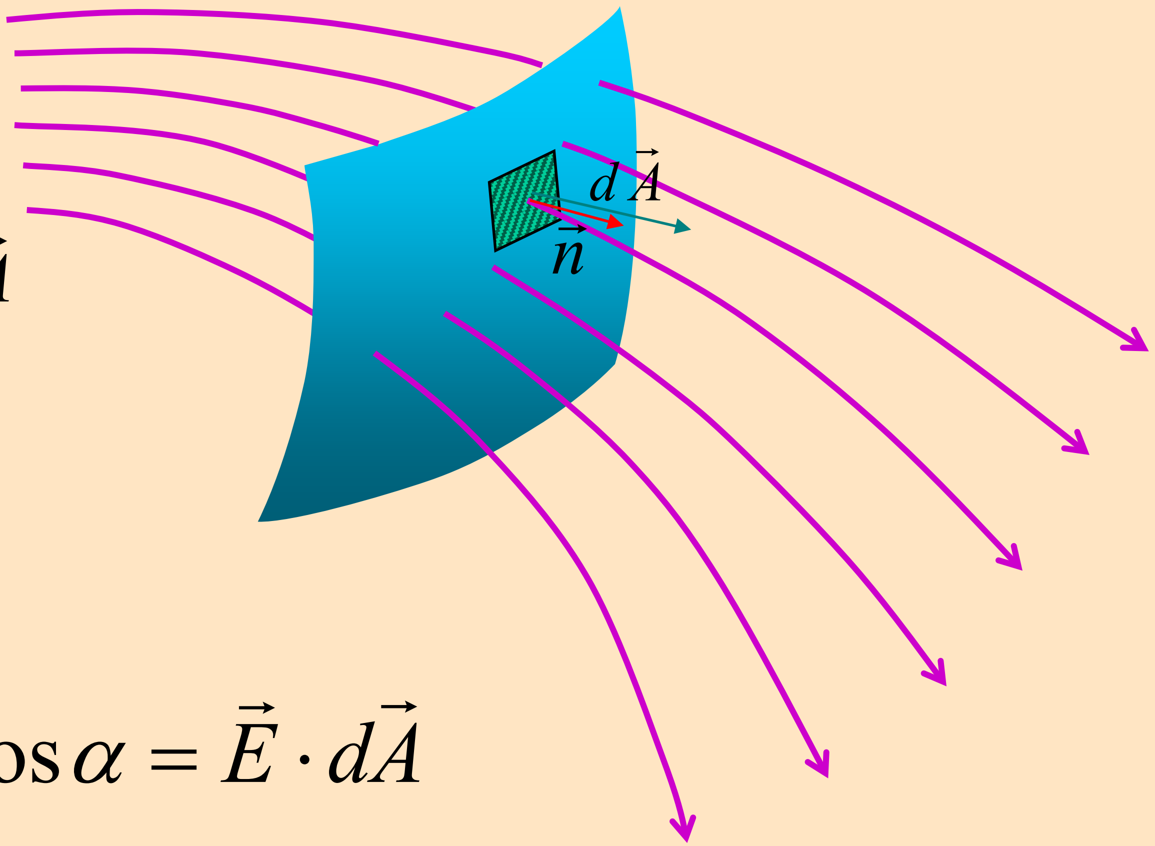
Strumień pola elektrycznego





$$\Phi = AE\cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{E}$$

Strumień pola elektrycznego



Element powierzchni $d\vec{A}$

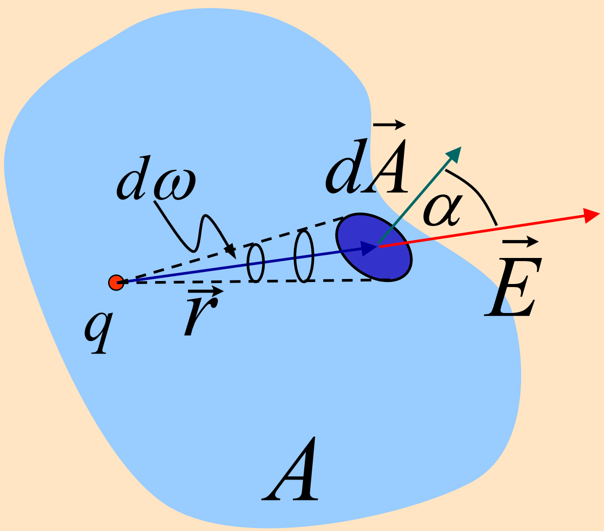
$$d\vec{A} = dA \cdot \vec{n}$$

$$d\Phi = E \cdot dA \cdot \cos\alpha = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi = \int_A d\Phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

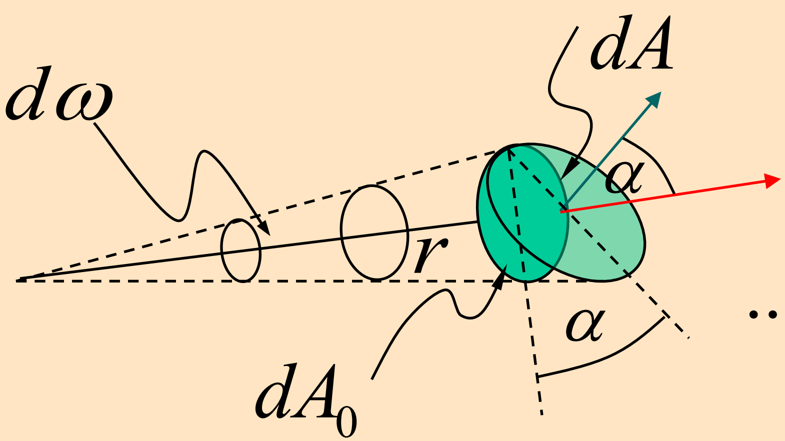
Prawo Gaussa

Obliczamy strumień pola przez dowolną <u>zamkniętą</u> powierzchnię obejmującą ładunek q



$$\Phi = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}d\vec{A} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_A \frac{|\vec{r}|\cos\alpha}{r^3}\left|d\vec{A}\right| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_A \frac{dA\cos\alpha}{r^2}\ldots$$



$$d\omega = \frac{dA_0}{r^2} = \frac{dA\cos\alpha}{r^2}$$

$$\ldots = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\oint_A d\omega}_{\text{Pełny kąt bryłowy}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Prawo Gaussa

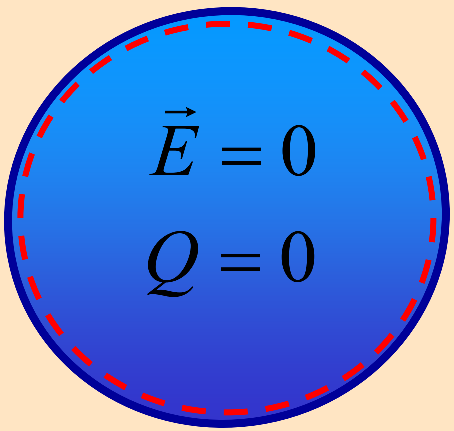
$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

Strumień pola elektrycznego przez dowolną zamkniętą powierzchnię (tzw. powierzchnię Gaussa) jest proporcjonalny do całkowitej wartości ładunku zamkniętego wewnątrz tej powierzchni

Zastosowanie prawa Gaussa

Rozkład ładunku na przewodniku

$$\Phi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$



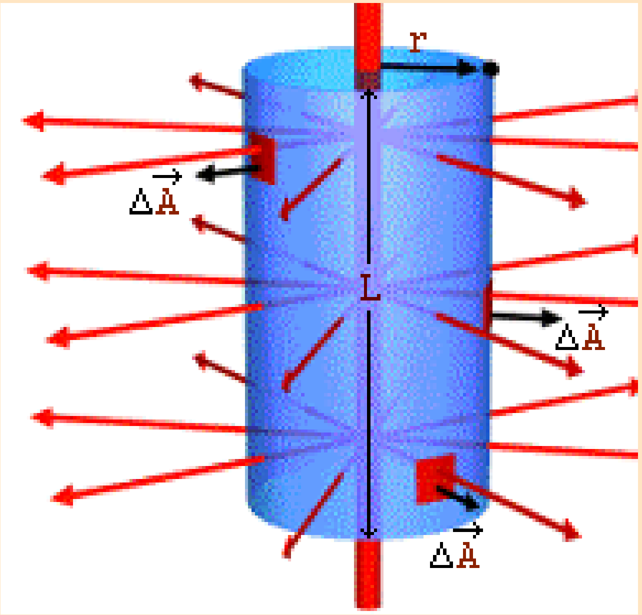
1. Wewnątrz przewodnika $\vec{E} = 0$
2. Φ=0
3. Ładunek wewnątrz przewodnika Q=0

Ładunek gromadzi się na powierzchni przewodnika

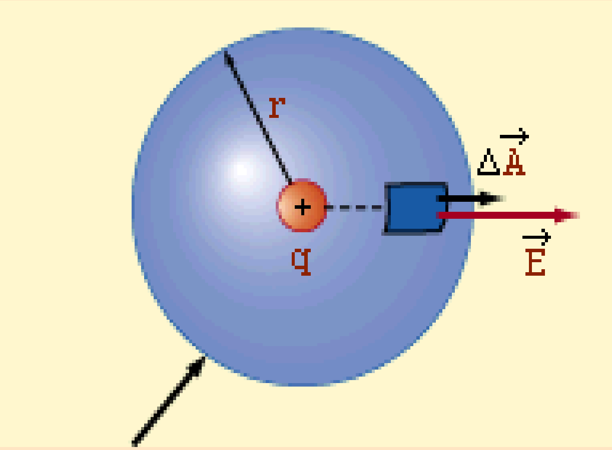
Prawo Gaussa

Obliczanie pól elektrycznych od symetrycznych rozkładów ładunku

1. Określić symetrię pola
2. Wybrać odpowiednią powierzchnię Gaussa
3. Obliczyć strumień przez powierzchnię Gaussa



Ładunek punktowy



Płaszczyzna Gaussa

$$q = \varepsilon_0 \sum_{p.kuli} \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$

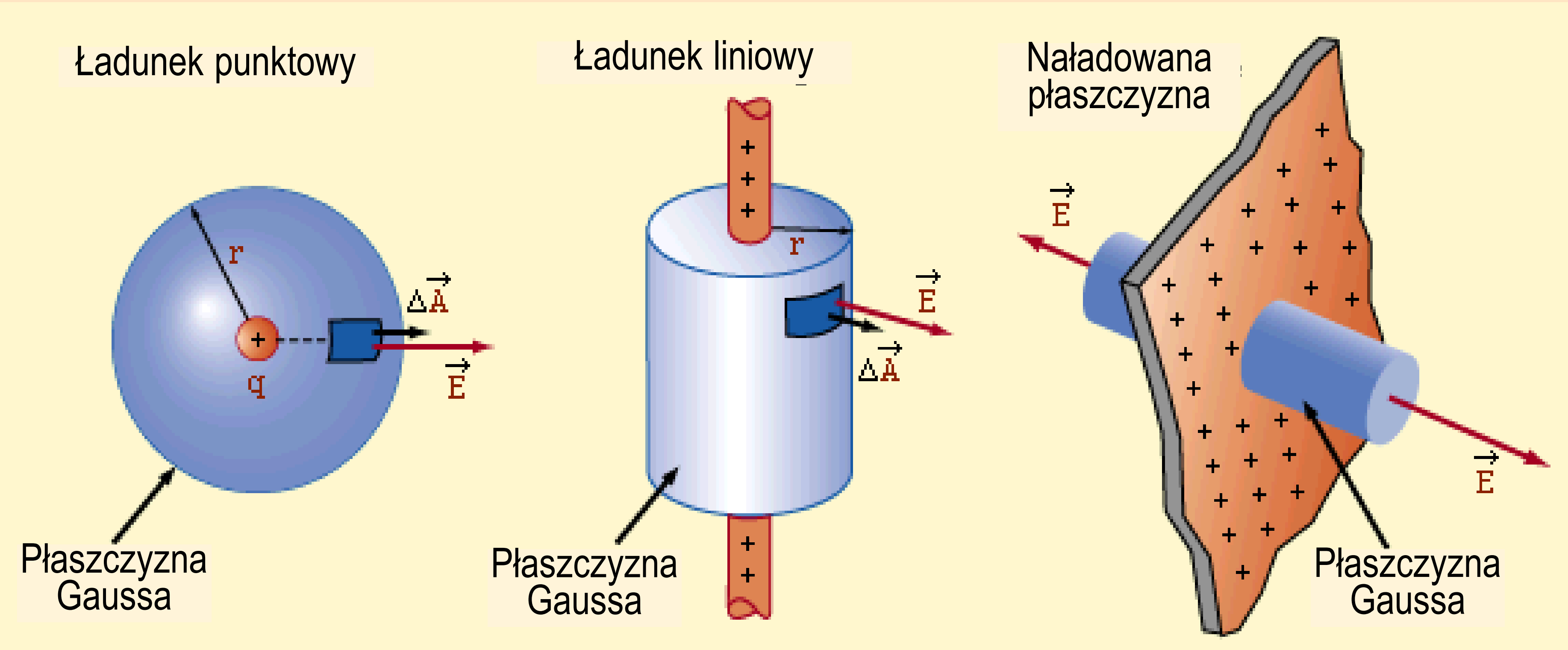
$$q = \varepsilon_0 E \sum_{p.kuli} \Delta A$$

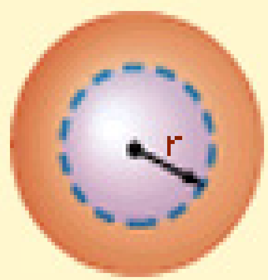
$$q = \varepsilon_0 E 4\pi r^2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Prawo Gaussa

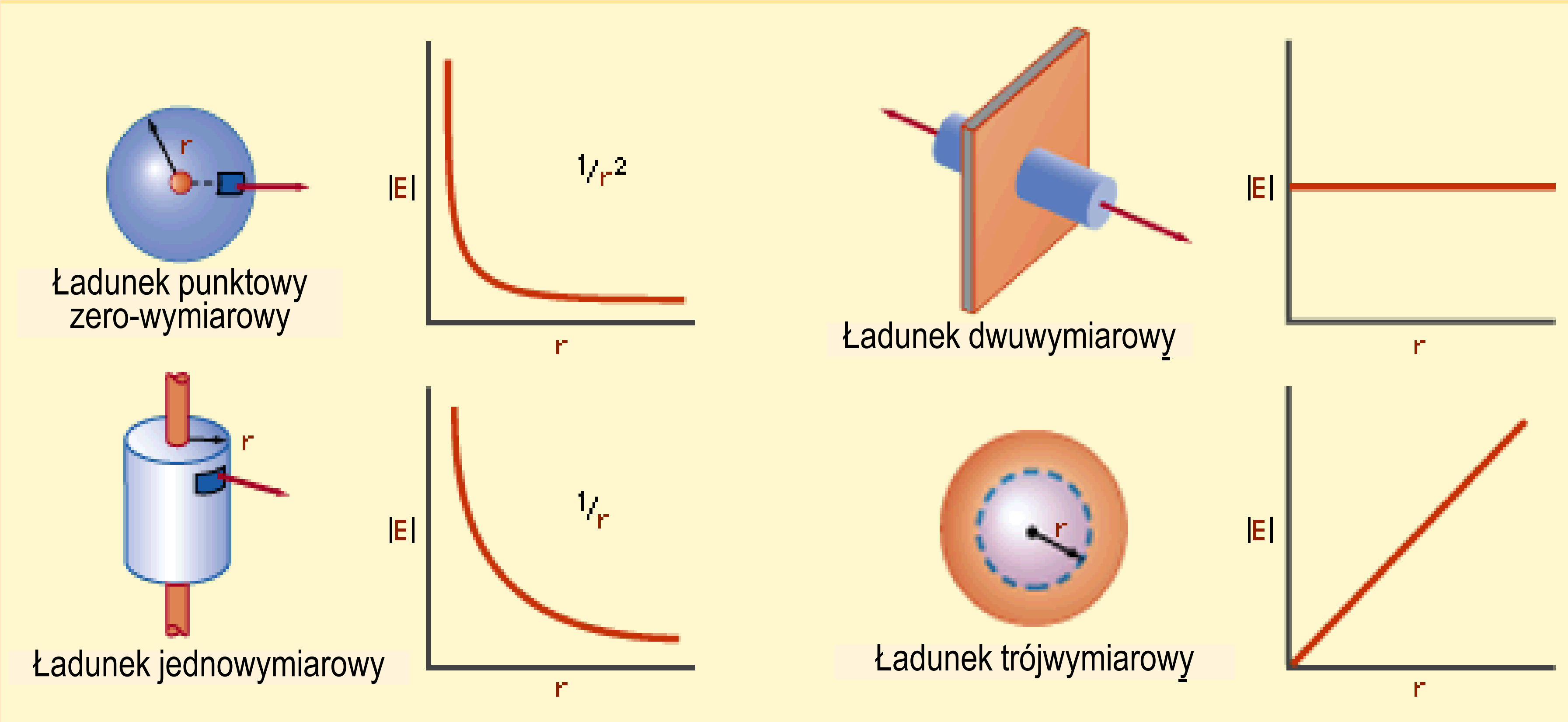
Zadania - pole elektryczne od różnych rozkładów ładunku





Pole elektryczne wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (z izolatora)

Prawo Gaussa



Potencjał pola elektrycznego

Pole elektryczne jest polem zachowawczym (potencjalnym).
Praca w polu elektrycznym nie zależy od drogi, a jedynie od punktu początkowego i końcowego

$$V(x, y, z) = \frac{E_p}{q}$$

$$\boxed{1\mathrm{V} = \frac{1\mathrm{J}}{1\mathrm{C}}}$$

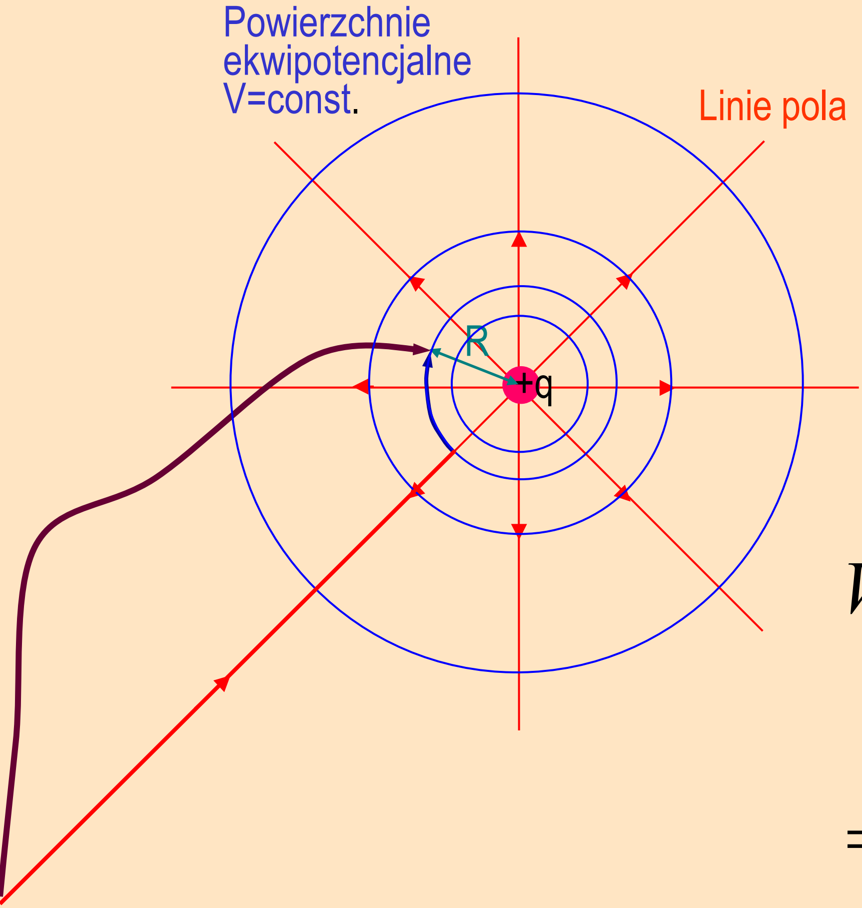
$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = W_{zewn} = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

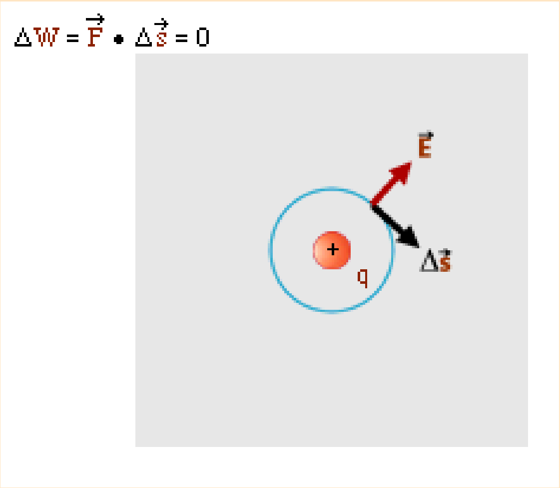
$$U = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Normalizacja potencjału: V(∞)=0

$$V(P) = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Potencjał ładunku punktowego





$$V(R) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} k\,\frac{q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}\cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_{\infty}^{R} k\,\frac{q}{r^2}dr = k\,\frac{q}{r}\Bigg|_{\infty}^{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R}$$

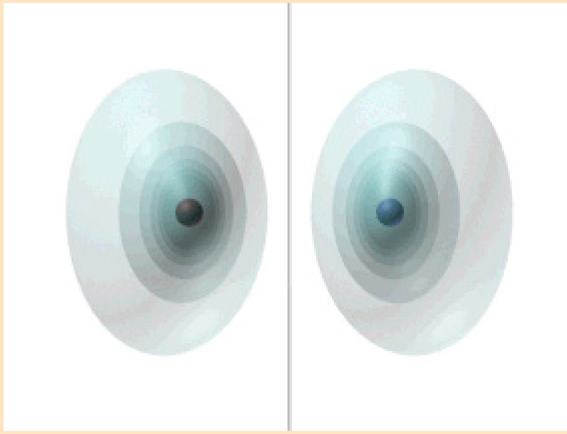
Praca w polu elektrycznym

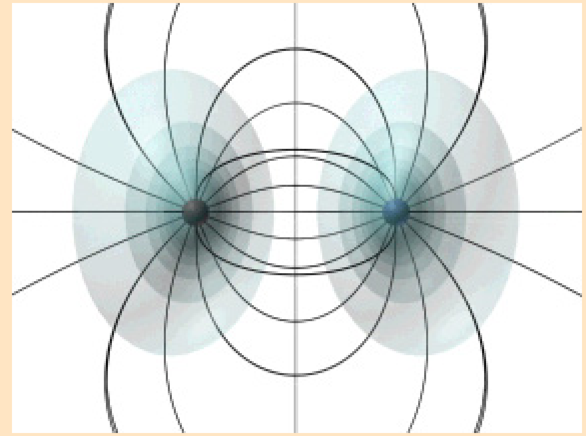
$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = W_{zewn} = -\int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$W_{A\to B} = \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = q(V_B - V_A)$$

1 eV = 1.6x10^{-19}C · 1V = 1.6x10^{-19}J

Związek między natężeniem pola i potencjałem





1-wym

$$V = V(x)$$

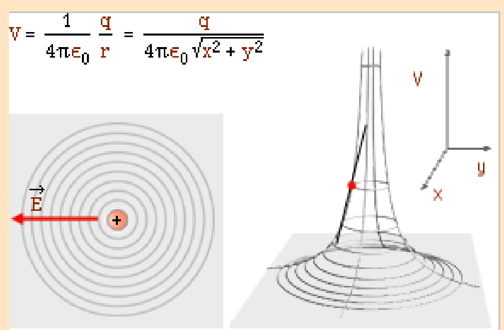
$$E = -\frac{dV(x)}{dx}$$

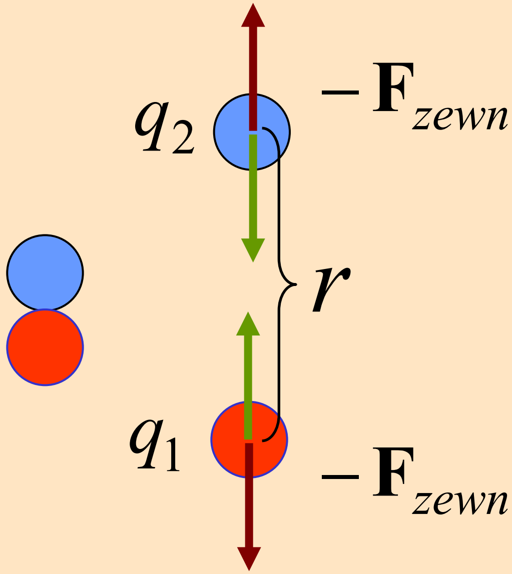
3-wym

$$V = V(\vec{r}) = V(x, y, z)$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V$$





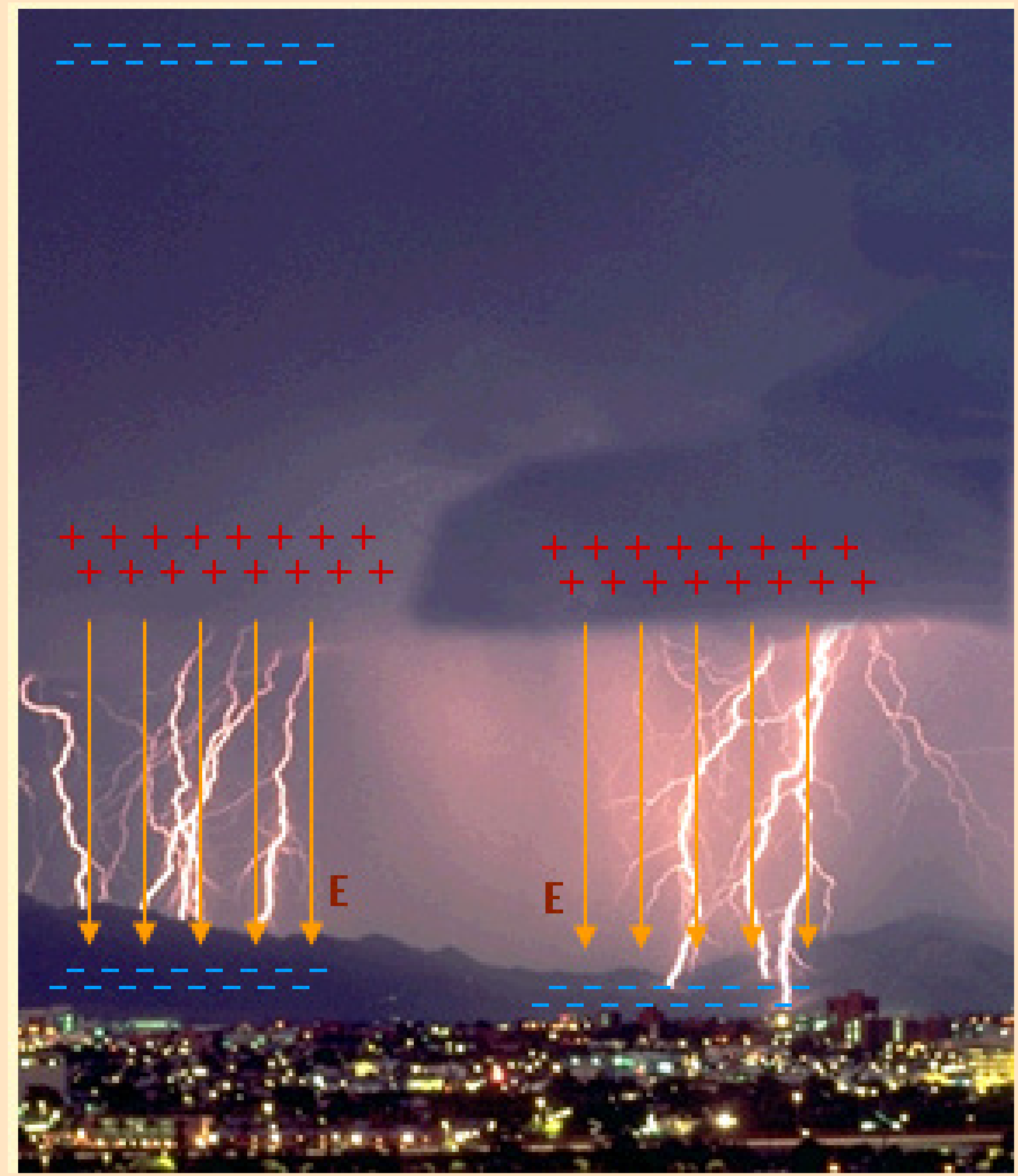
Energia elektrostatyczna

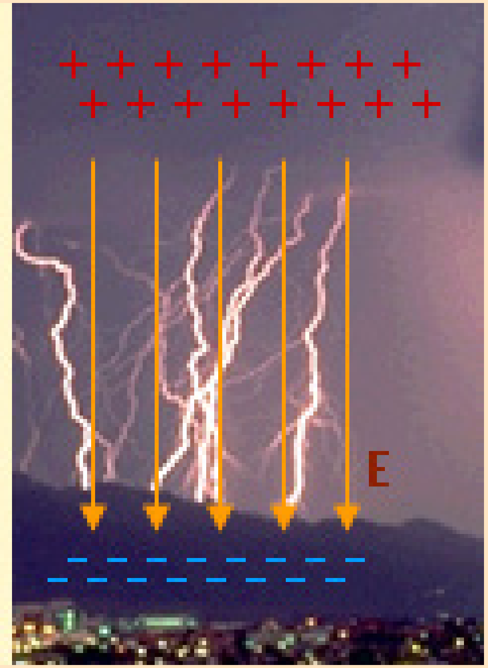
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

$$U_{1,2}^{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

Wiele ładunków

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

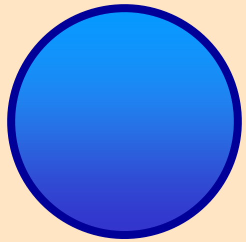




Pojemność elektryczna

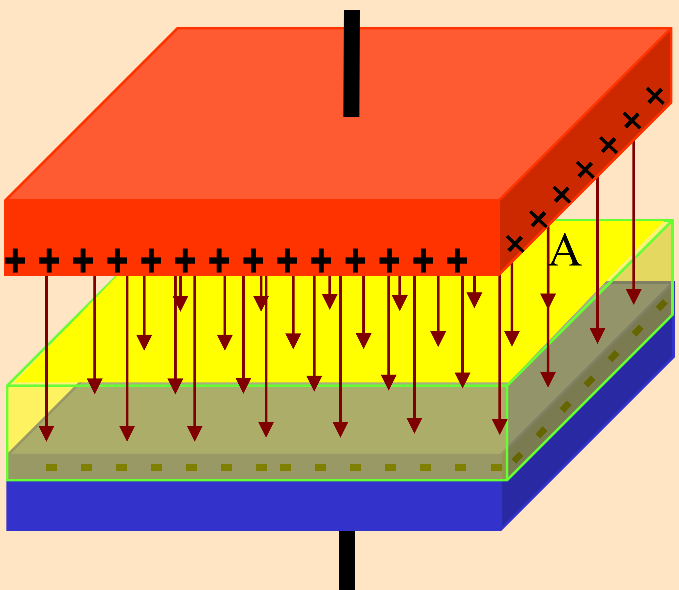
$$C = \frac{Q}{V} \qquad \boxed{1\mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}}}$$

Pojemność kuli



$$C = \frac{Q}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Kondensator płaski



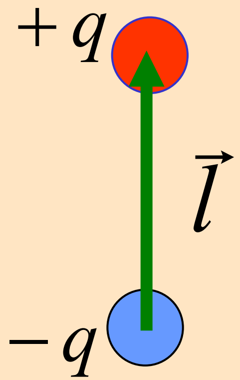
$$\Phi = E \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$U = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Własności elektryczne materii - dielektryki

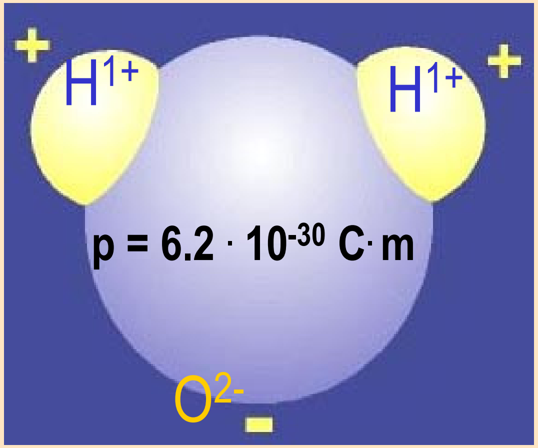
Dipol elektryczny



elektryczny moment dipolowy

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

np. cząsteczka wody H_2O

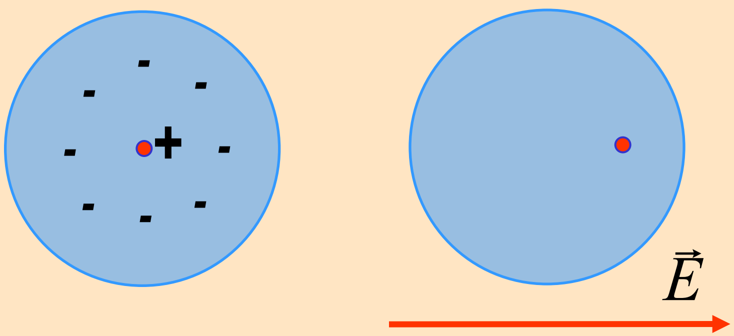


trwały moment dipolowy

Dielektryki - substancje nieprzewodzące (izolatory)
Posiadają ładunki związane (momenty dipolowe)

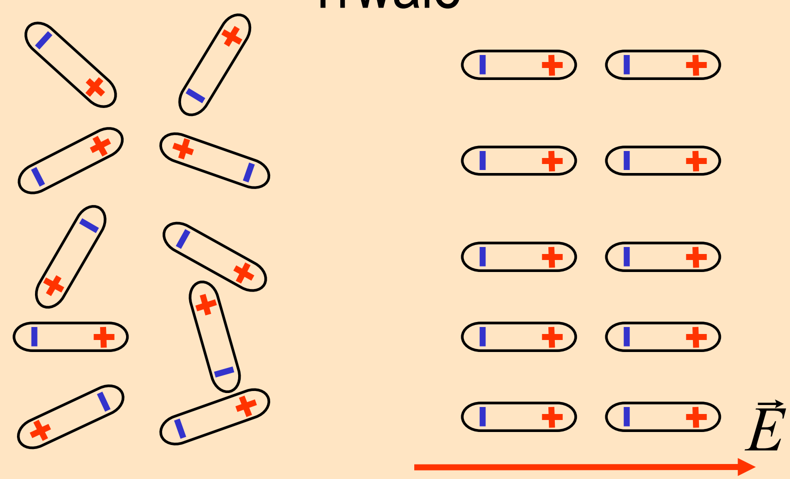
Wektor polaryzacji $$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\mathrm{V}}$$

Indukowane



bez pola z polem

Trwałe



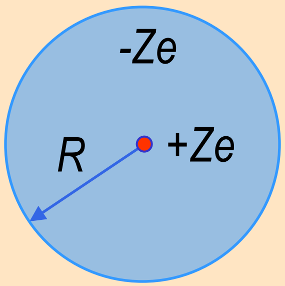
bez pola z polem

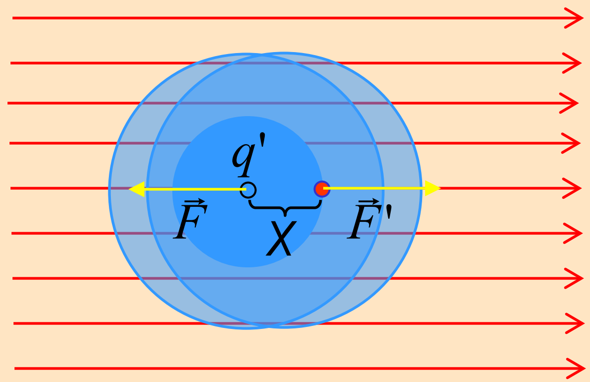
Bo działa moment siły:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Polaryzacja dielektryków

Indukowany moment dipolowy
np. obojętnego atomu





$$q' = \frac{ZeX^3}{R^3}$$

Równowaga sił działających na jądro

$$EZe = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'Ze}{X^2}$$

$$\underbrace{ZeX}_{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E$$

$$ZeX = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E$$

$$\vec{p} = \underbrace{4\pi R^3}_{\alpha}\varepsilon_0 \vec{E} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}$$

α - polaryzowalność cząsteczki

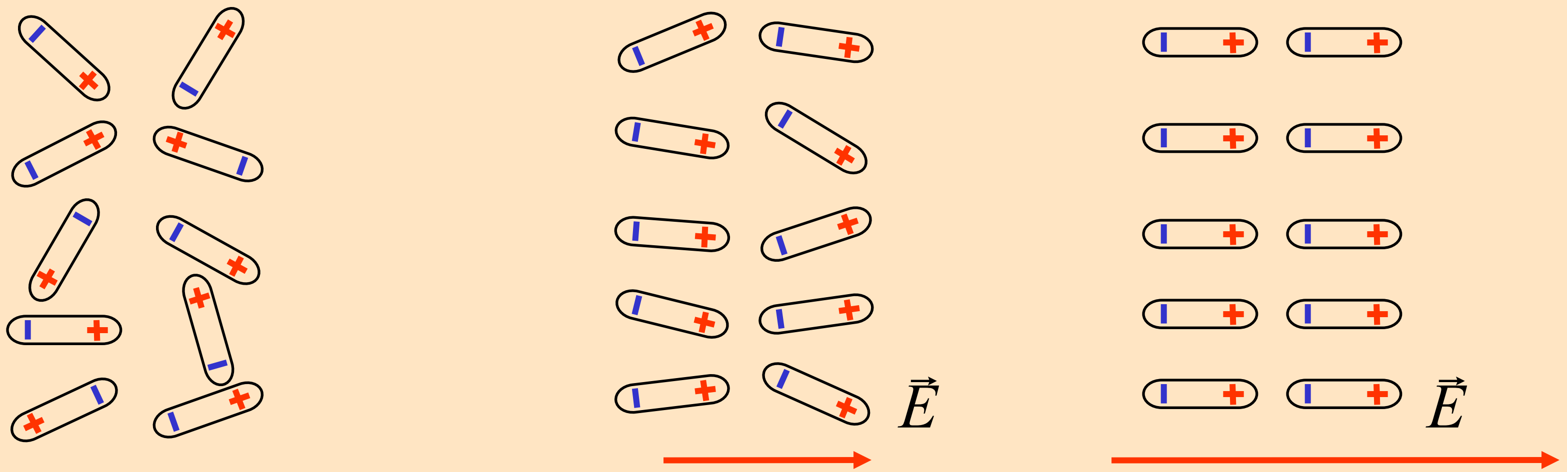
Gęstość cząsteczek

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\mathrm{V}} = \underbrace{n\alpha}_{\chi}\varepsilon_0 \vec{E} = \chi\varepsilon_0 \vec{E}$$

Podatność elektryczna

Polaryzacja dielektryków

Trwały moment dipolowy



bez pola

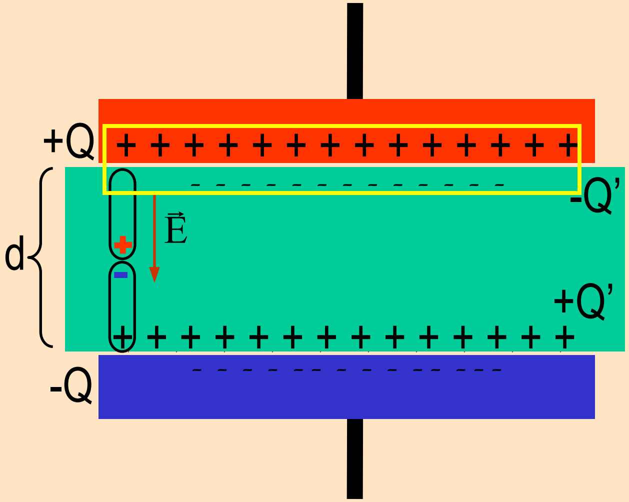
z polem

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \text{energia termiczna}$$

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

Dla niezbyt silnych pól

Kondensator płaski z dielektrykiem



$$\Phi = E \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q'}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} - \frac{Q'}{\varepsilon_0 A}$$

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{Q'd}{\mathrm{V}} = \frac{Q'}{\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad Q' = A\left|\vec{P}\right| = A\chi\varepsilon_0 E$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} - \chi E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\frac{1}{\underbrace{(1+\chi)}_{\kappa}} = \frac{Q}{\kappa\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{C} = \frac{Q}{V} = \boxed{\kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}} = \kappa C_0$$

stała dielektryczna

Materiał	Stała dielektryczna
próżnia	1
powietrze	1,00054
mika	5
woda	80

Energia w kondensatorze

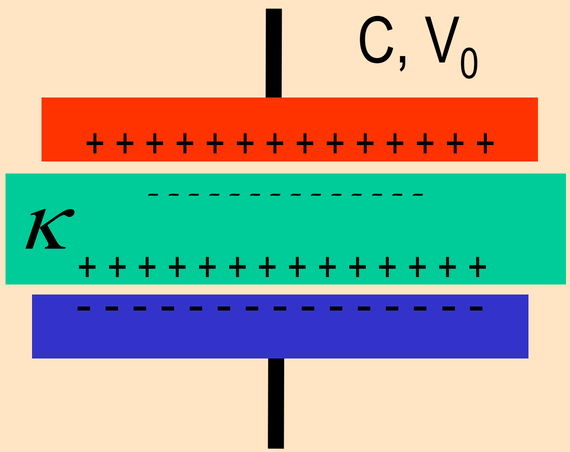
Praca związana z ładowaniem kondensatora

$$dW = Vdq \qquad W = \int_0^Q Vdq = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Energia naładowanego kondensatora

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Zadanie



Jak zmieni się energia?

Zmniejszy się (dlaczego?)

Gdzie się podziała różnica?

Energia pola elektrycznego

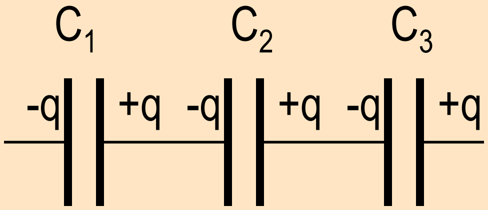
$$E_C = \frac{1}{2} C V^2$$

Gęstość energia pola elektrycznego

$$\boxed{\rho_E} = \frac{\frac{1}{2} C V^2}{A \cdot d} = \frac{\frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 \frac{A}{d} V^2}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 \left(\frac{V}{d} \right)^2 = \boxed{\frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 E^2}$$

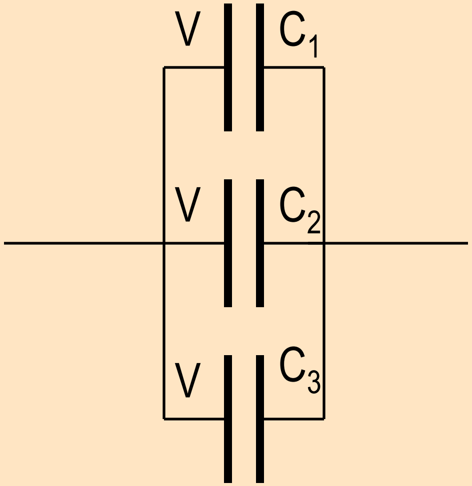
W punkcie pola elektrycznego o natężeniu E zmagazynowana jest energia proporcjonalna do E^2

Baterie kondensatorów



Połączenie szeregowe

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots.$$



Połączenie równoległe

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots.$$

Zadanie

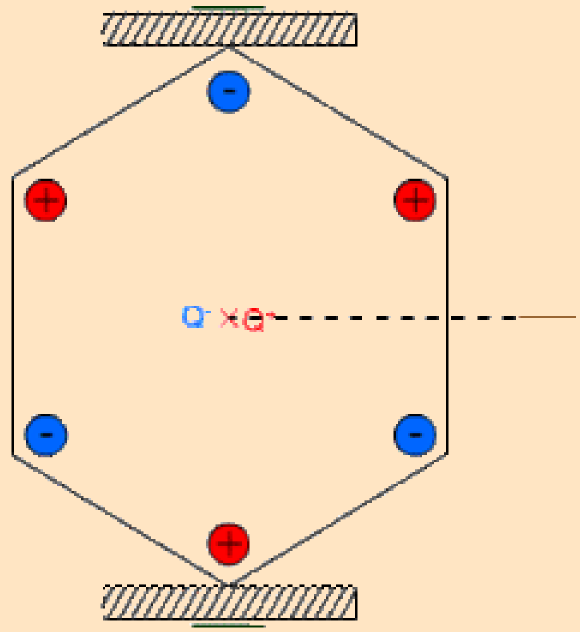
Wyprowadzić wzory

Zjawisko piezoelektryczne

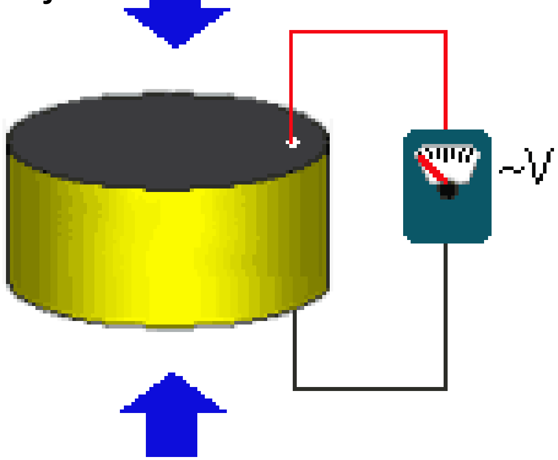
zmiana rozmiarów kryształu pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego.

odwrotne zjawisko piezoelektryczne:

pojawianie się ładunków elektrycznych (napięcia na przeciwległych ściankach deformowanego kryształu.

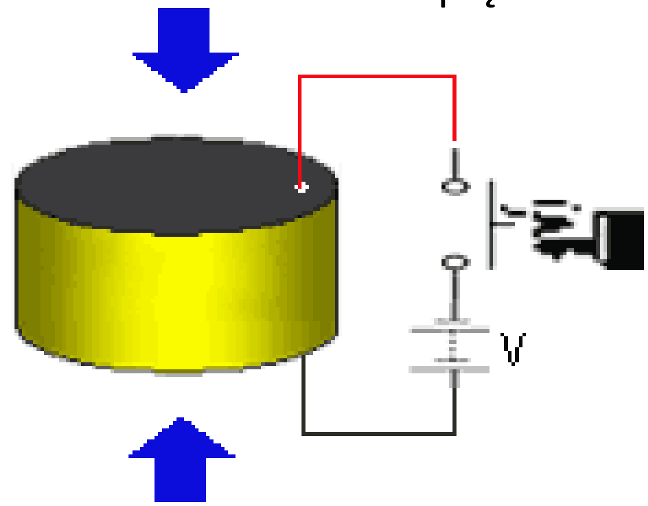


Deformacja

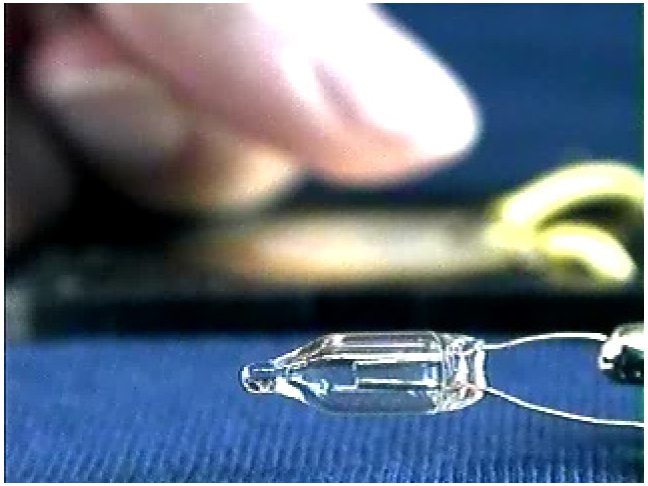


Efekt piezoelektryczny

Napięcie



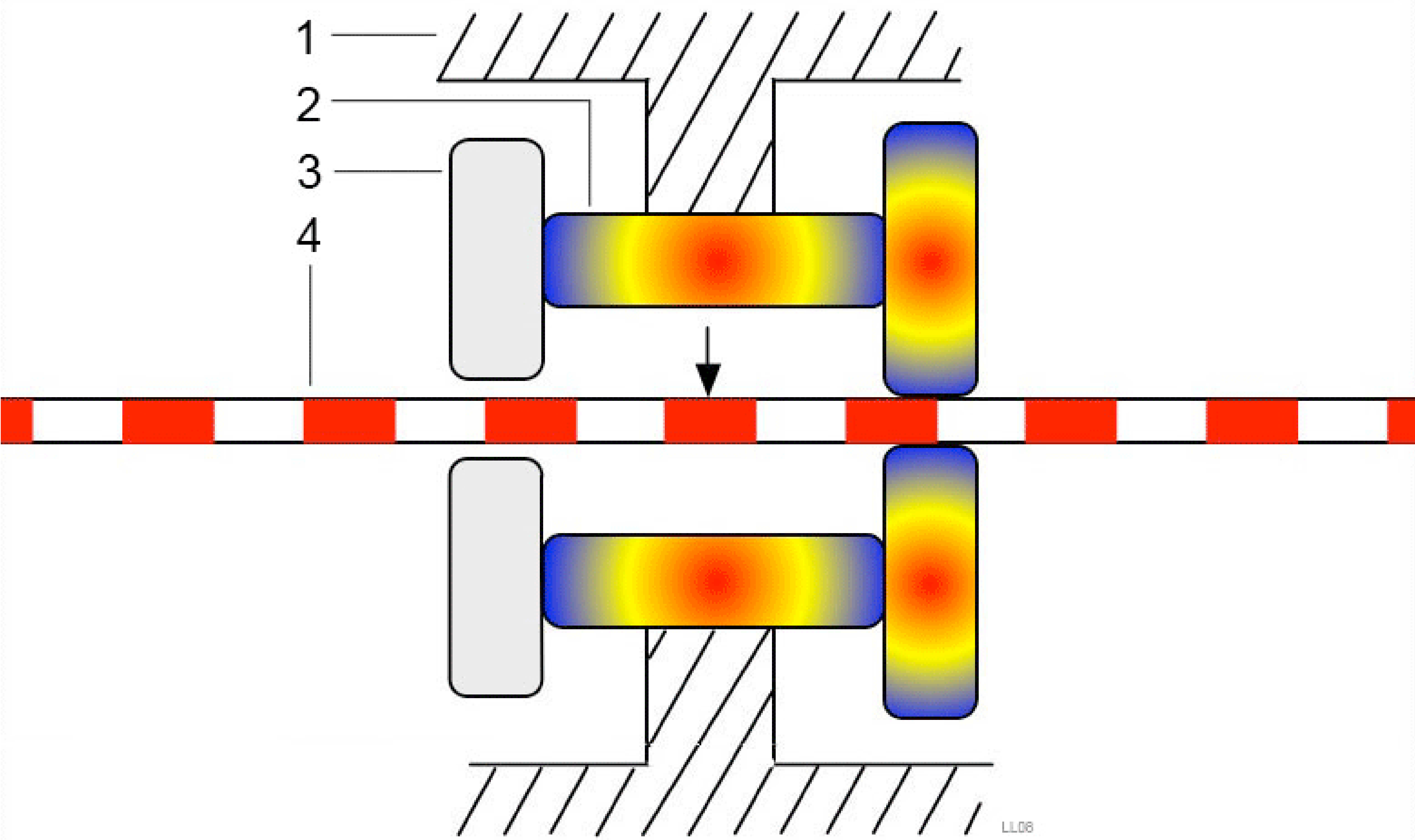
Odwrotny efekt piezoelektryczny

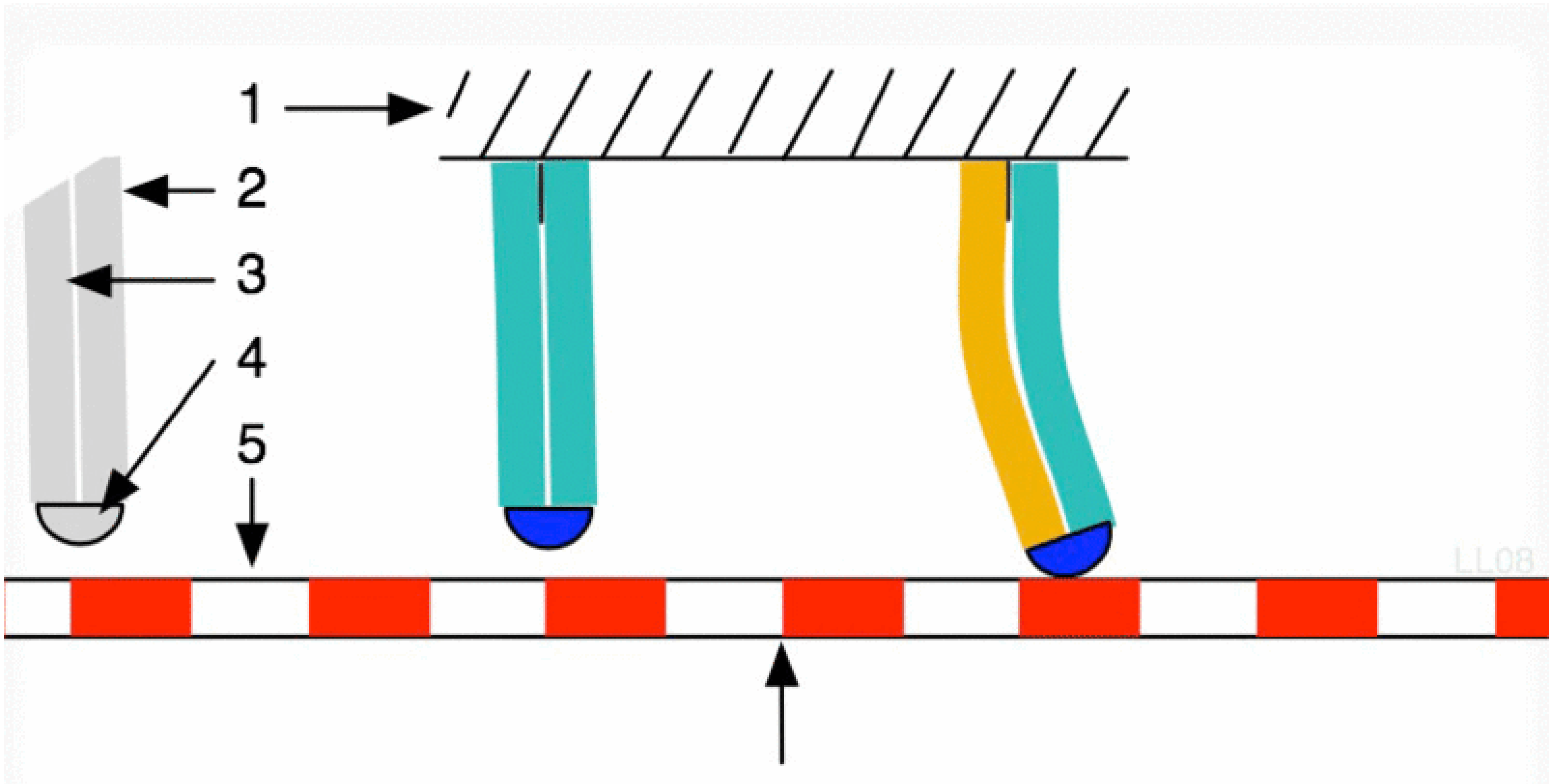


Zastosowania:

oscylatory kwarcowe (zegarki), przetworniki elektro-mechaniczne (i odwrotnie), np.tensometry

Piezo-motory




1
2
3
4
5
LL08