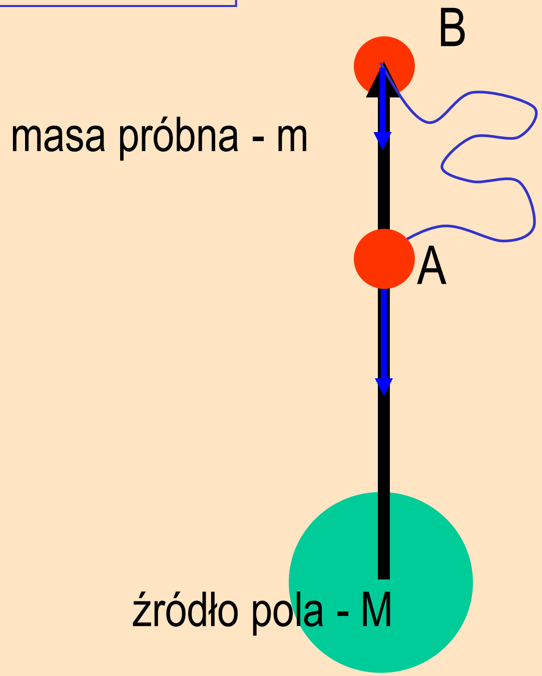
Siły zachowawcze inaczej:
Pole sił (na przykładzie sił grawitacji)

$$\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Opis przy użyciu sił

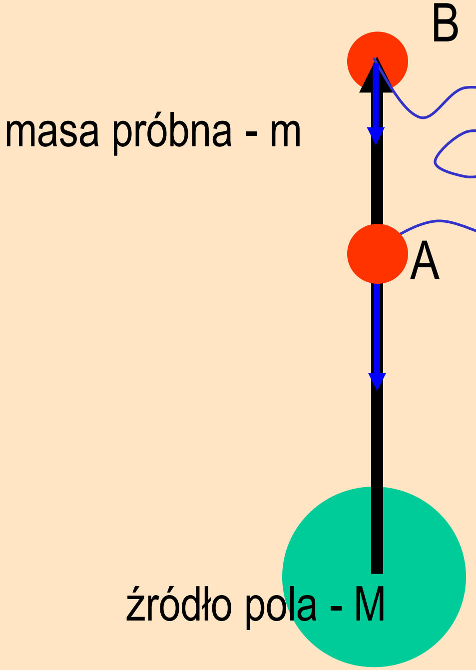


Natężenie pola $\vec{K}$

$$\vec{K} \equiv \frac{\vec{F}_G}{m} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Natężenie pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi jest równe liczbowo g

Pole sił (na przykładzie sił grawitacji)



Opis przy użyciu energii potencjalnej

Energia potencjalna (jej zmiana) - praca przeciwko siłom oddziaływania - określona na drodze AB

$$\Delta U = U_B - U_A = W^{zewn}_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = -\int_A^B -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot d\vec{r}$$

Ponieważ pole grawitacyjne jest polem zachowawczym, praca nie zależy od drogi - najłatwiej obliczyć ją wzdłuż linii sił

$$\Delta U = U_B - U_A = \int_{r_A}^{r_B} G\frac{mM}{r^2}dr = -G\frac{mM}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = \left(-G\frac{mM}{r_B}\right) - \left(-G\frac{mM}{r_A}\right) =$$

$$= U_B \quad - \quad U_A$$

Energia potencjalna

$$\boxed{U(r) = W^{zewn}_{\infty\to r} = \int_\infty^r G\frac{mM}{r^2}dr = -G\frac{mM}{r}, \quad U(\infty) = 0}$$

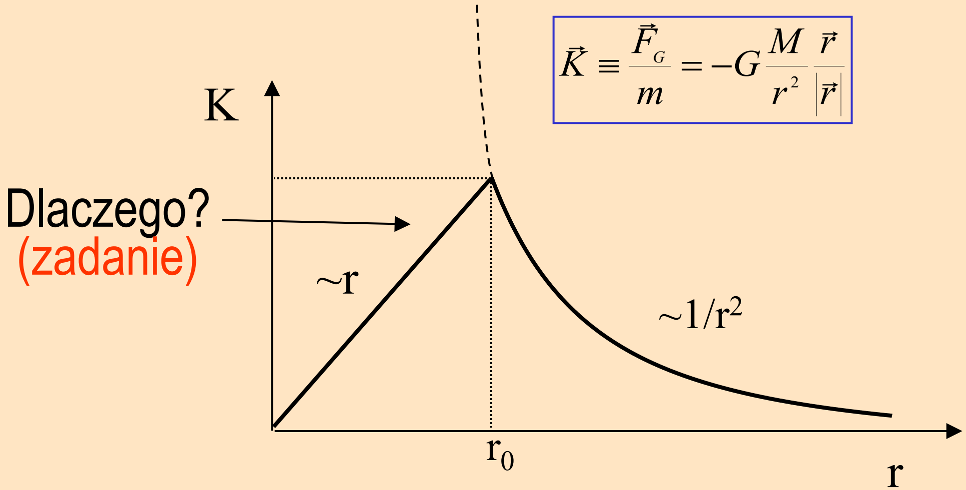
Potencjał

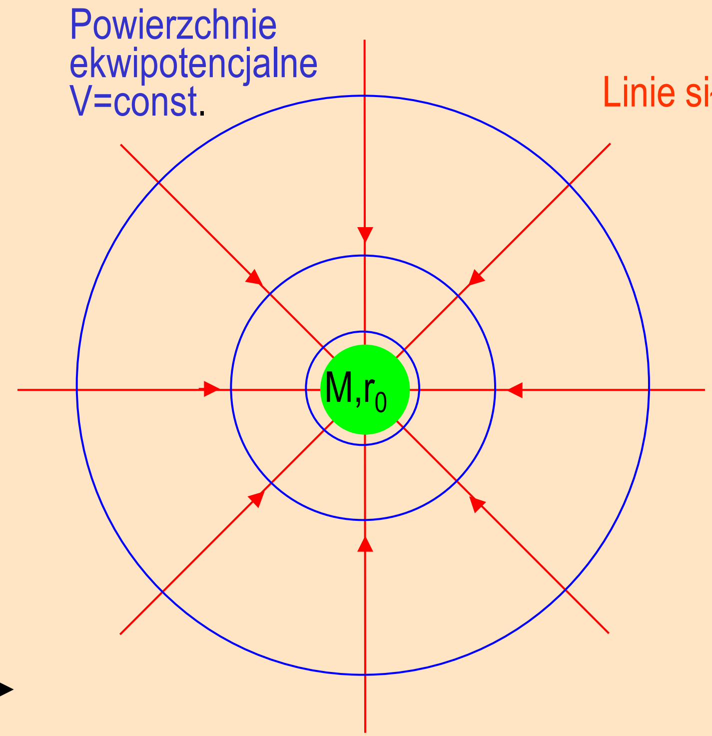
$$\boxed{V(r) \equiv \frac{U(r)}{m} = -G\frac{M}{r}}$$

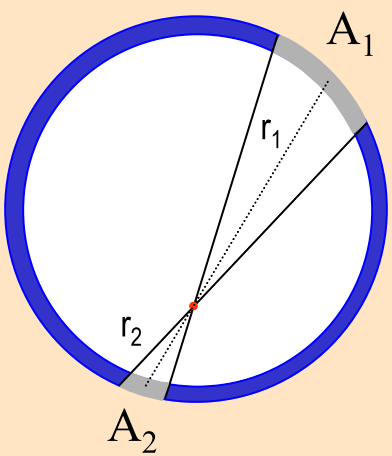
Pole sił (na przykładzie sił grawitacji)

Natężenie pola $\left|\vec{K}\right| = G\dfrac{M}{r^2}$

$$\vec{K} \equiv \frac{\vec{F}_G}{m} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$$





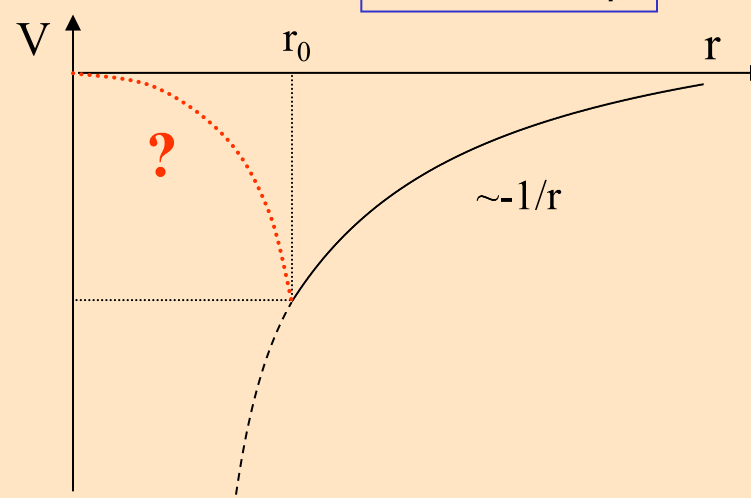


$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}\frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 1$$

Potencjał $V(r) = -G\dfrac{M}{r}$

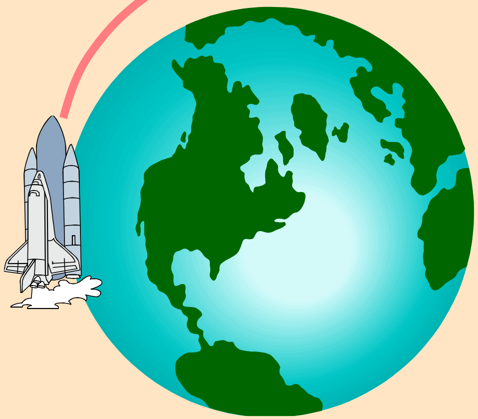


Przykład

Prędkość ucieczki
(II prędkość kosmiczna)

$$E_k + U(R_Z) = U(R_Z + h)$$

$$U \xrightarrow{h\to\infty} 0$$



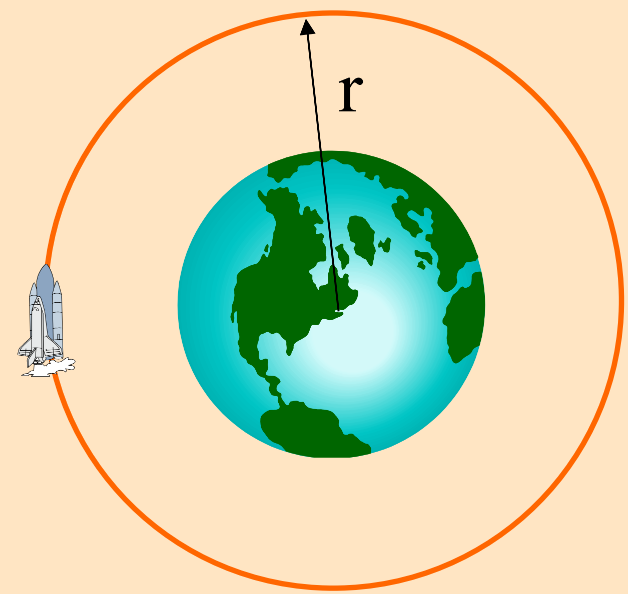
$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - G\frac{M_Z m}{R_Z} = -G\frac{M_Z m}{R_Z + h}$$

$$\frac{m\mathrm{v}_{\mathrm{II}}^2}{2} = G\frac{M_Z m}{R_Z}, \ czyli \ \mathrm{v}_{\mathrm{II}} = \sqrt{2G\frac{M_Z}{R_Z}} \cong 11.2\ km/s$$

Prędkość na orbicie
(I prędkość kosmiczna)

$$\frac{m v^2}{r} = G\frac{M_Z m}{r^2}$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{min}} = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} = 7{,}9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$



Związek między siłą i enegią potencjalną

Siła zachowawcza

$\vec{F}(x,y,z)$

$$\xrightarrow{-\int_A^B \vec{F}_{oddz}\cdot d\vec{r}}$$

$$\xleftarrow[?]{-\,\mathrm{grad}\,U}$$

Energia potencjalna

$U(x,y,z)$

Praca elementarna

$$\Delta W = \Delta U = -\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = -(F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z)$$

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

1-wym

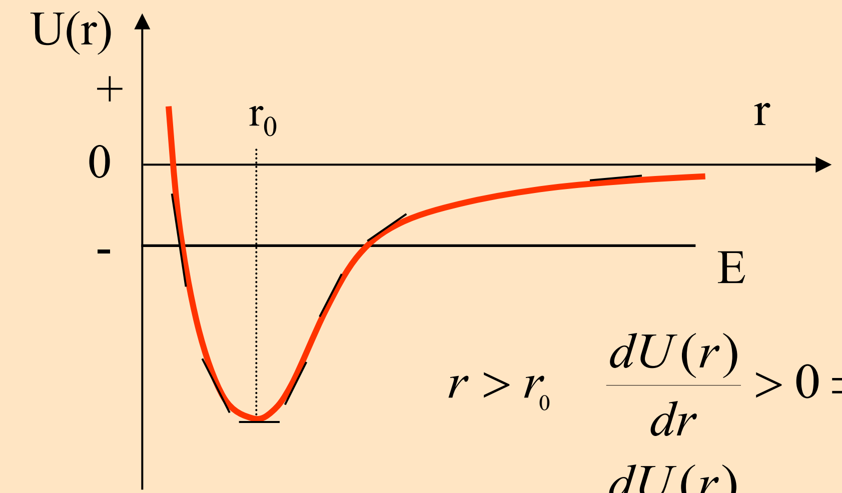
$$\boxed{\begin{aligned} U &= U(x) \\ F &= -\frac{dU(x)}{dx} \end{aligned}}$$

3-wym

$$\boxed{\begin{aligned} U &= U(\vec{r}) = U(x,y,z) \\ \vec{F} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \\ \vec{F} &= -\mathrm{grad}\,U \end{aligned}}$$

Przykład

Potencjał oddziaływania miedzy-atomowego w dwuatomowej cząsteczce



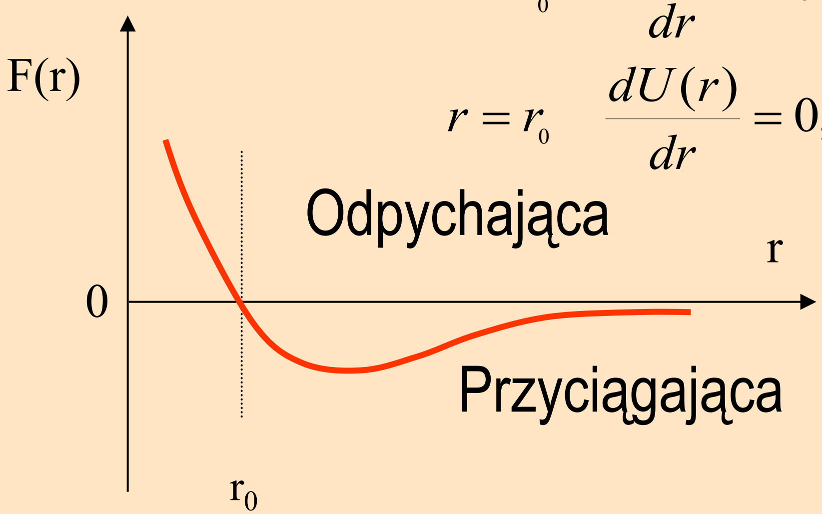
$$U = U(r)$$

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$$

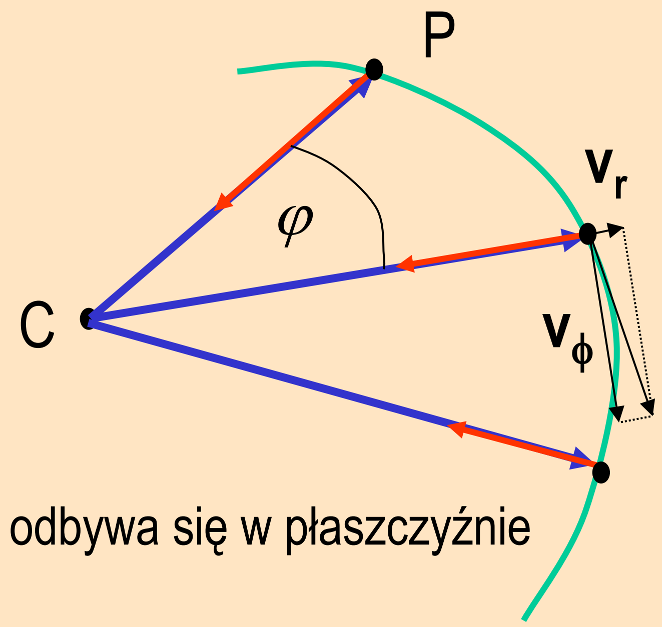
$r > r_0 \quad \frac{dU(r)}{dr} > 0 \Rightarrow F < 0 \Rightarrow$ przyciąganie

$r < r_0 \quad \frac{dU(r)}{dr} < 0 \Rightarrow F > 0 \Rightarrow$ odpychanie

$r = r_0 \quad \frac{dU(r)}{dr} = 0, \ F = 0 \Rightarrow$ Równowaga, minimum energii



Ruch w polu sił centralnych (na przykład grawitacji)



Siła centralna

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Ruch odbywa się w płaszczyźnie

Moment siły centralnej (względem centrum siły)

$$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r} \times \vec{r})\frac{f(r)}{r} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

W ruchu pod wpływem siły centralnej moment pędu jest zachowany

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi)$$

$$= m[\vec{r} \times \vec{v}_r + \vec{r} \times \vec{v}_\varphi] = m(\vec{r} \times \vec{v}_\varphi) = \vec{L}_\varphi$$

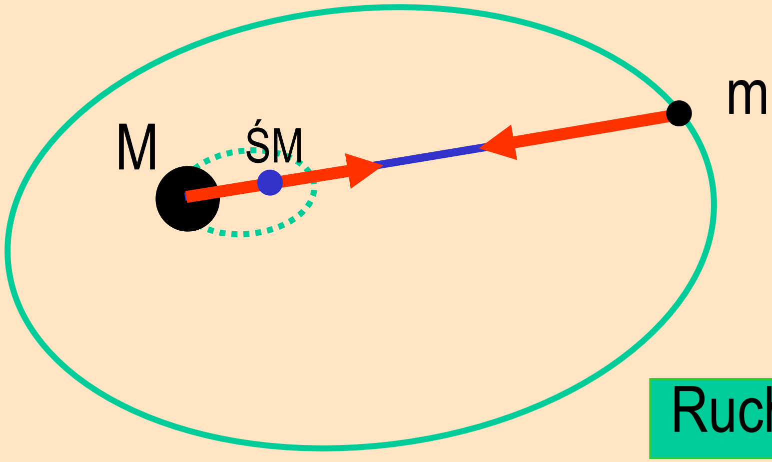
$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

$$v_\varphi = \omega r$$

$\vec{L}_\varphi \perp$ płaszczyzny ruchu

$$L = L_\varphi = mr^2\omega$$

Dwa ciała
(Planeta-Słońce, gwiazda -kometa)



Środek masy

$$\vec{R}_{śm} \equiv \frac{m\vec{r}_m + M\vec{r}_M}{m+M}$$

$$\vec{R}_{śm} \equiv \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

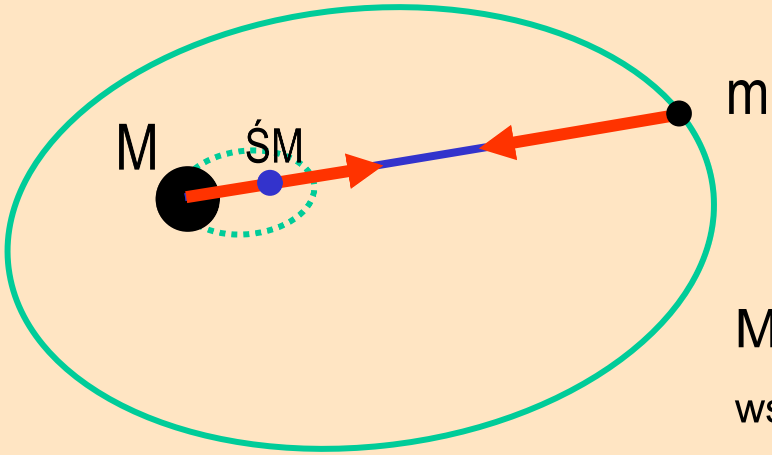
Ruch środka masy

Jeśli nie działają siły zewnętrzne: $\vec{P}_{tot} = \vec{p}_m + \vec{p}_M = const.$

$$\vec{V}_{śm} = \frac{d\vec{R}_{śm}}{dt} = \frac{m\frac{d\vec{r}_m}{dt} + M\frac{d\vec{r}_M}{dt}}{m+M} = \frac{\vec{p}_m + \vec{p}_M}{m+M} = const.$$

Pod wpływem siły zewnętrznej: $$\vec{a}_{śm} = \frac{d^2\vec{R}_{śm}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{wyp}}{\sum m_i}$$

Dwa ciała
(Planeta-Słońce, gwiazda -kometa)



Ruchy planet w układzie słonecznym

$M_{Sł}=2*10^{30}$ kg, $m_Z=6*10^{24}$ kg, $r_{Sł\text{-}Z}=1.5*10^{11}$m

współrzędna środka masy (względem środka Słońca):

$$R_{śm} \equiv \frac{m_Z 1{,}5 \cdot 10^{11} + M_{Sł} \cdot 0}{m_Z + M_{Sł}} = 4{,}5 \cdot 10^5 \,\mathrm{m}$$

w porównaniu z $r_{Sł} = 10^9$ m

Uproszczenia:

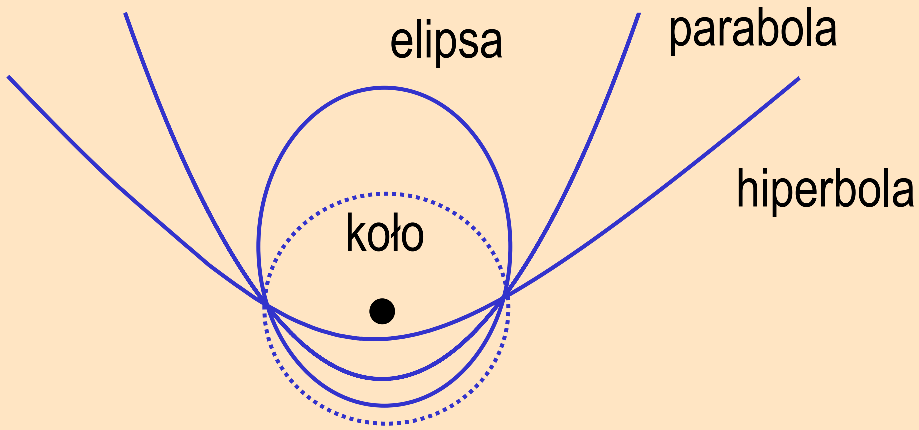
zaniedbanie ruchu Słońca

zaniedbanie oddziaływań Planet

Mimo uproszczeń - ogólne rozwiązanie równania ruchu:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

jest dość żmudne - prowadzi do rozwiązań w postaci krzywych stożkowych
(szczególnymi rozwiązaniami są proste)



O charakterze ruchu decyduje całkowita energia i warunki początkowe

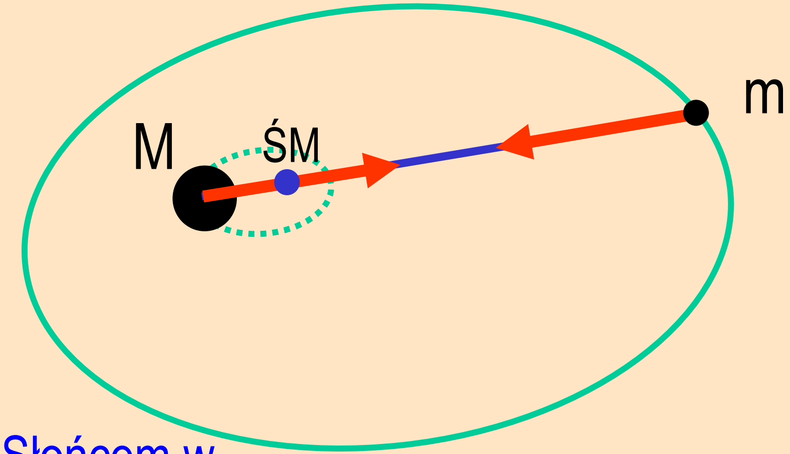
Ciekawe symulacje na stronie:
http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/physics

W szczególności ruch planet i satelitów

http://phet.colorado.edu/en/simulation/gravity-and-orbits

http://phet.colorado.edu/en/simulation/my-solar-system

Prawa Keplera
Ruch planet układzie słonecznym



Pierwsze prawo Keplera

Każda planeta krąży po orbicie eliptycznej, ze Słońcem w jednym z ognisk tej elipsy.

Drugie prawo Keplera (prawo równych pól)

Linia łącząca Słońce i planetę zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.

(udowodnić w oparciu o zasadę zachowania momentu pędu)

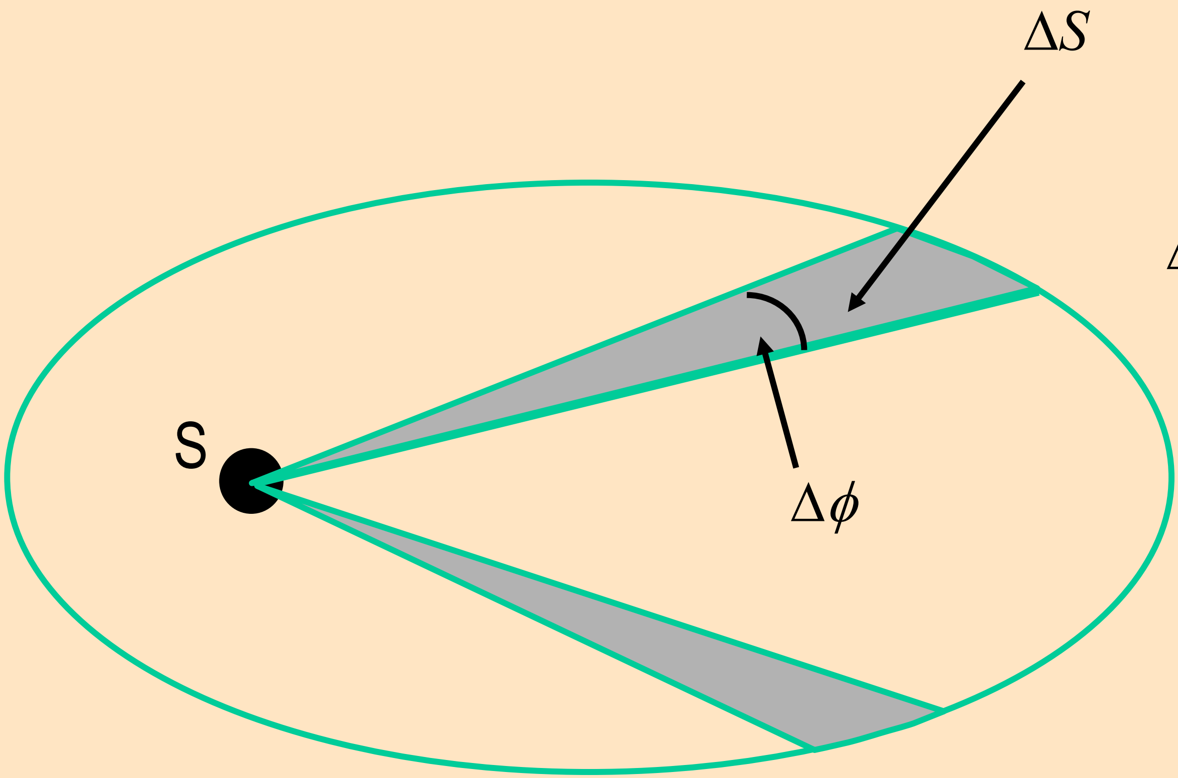
Trzecie prawo Keplera

Sześciany półosi wielkich orbit dowolnych dwóch planet mają się do siebie jak kwadraty ich okresów obiegu.

(udowodnić dla orbit kołowych)

$$\frac{m_p \mathrm{v}^2}{r} = G\frac{M_S m_p}{r^2}$$

Drugie prawo Keplera (prawo równych pól)



$$\Delta S \approx \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \Delta\phi = \frac{1}{2} r^2 \Delta\phi$$

Prędkość polowa

$$v_{pol} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$